



Escola de Camins

Escola Tècnica Superior d'Enginyeria de Camins, Canals i Ports
UPC BARCELONATECH

**DISEÑO NO LINEAL DE ESTRUCTURAS DE HORMIGÓN
ARMADO FRENTE A CARGAS Y DEFORMACIONES
IMPUESTAS**

Trabajo realizado por:

Manuel Antonio Malagón Collado

Dirigido por:

Antonio Marí Bernat

Máster en:

Ingeniería Estructural y de la Construcción

Barcelona, Junio de 2018

Departamento de Ingeniería Civil y Ambiental.

TRABAJO FINAL DE MÁSTER

TESIS DE MÁSTER

Máster

MÁSTER DE INGENIERÍA ESTRUCTURAL Y DE LA CONSTRUCCIÓN

Título

“DISEÑO NO LINEAL DE ESTRUCTURAS DE HORMIGON ARMADO FRENTE
A CARGAS Y DEFORMACIONES IMPUESTAS”

Autor

MANUEL ANTONIO MALAGÓN COLLADO

Tutor

ANTONIO MARÍ BERNAT

Intensificación

TECNOLOGÍA DE ESTRUCTURAS

Fecha

BARCELONA, JUNIO 2018

AGRADECIMIENTOS

Inmensa gratitud a mi maestro y tutor de tesis, Prof. Antonio Marí, que con su incesante disposición, paciencia y sabiduría ha hecho posible el desarrollo de este proyecto. Ha sido uno de los honores más grandes haber trabajado junto a un ser humano tan excepcional, y con tanto que ofrecer a los demás.

Esta tesis de máster se ha desarrollado en el marco del proyecto de investigación denominado "Evaluación de la capacidad resistente frente a esfuerzos tangentes de estructuras de hormigón mediante modelos mecánicos para la extensión de su vida útil"(BIA 2015-64672-C4-1-R), financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad de España (MINECO) y por los Fondos Europeos de Desarrollo Regional (FEDER), y desarrollado en el Departamento de Ingeniería Civil y Ambiental de la Universidad Politécnica de Cataluña.

RESUMEN

Actualmente, las normativas no definen un procedimiento específico para considerar el efecto de las deformaciones impuestas cuando se hacen las comprobaciones en estado límite último. Estas únicamente se limitan a establecer que dichos efectos deben considerarse cuando sean significativos, pero sin ofrecer ningún marco de referencia al respecto, ni tampoco algún procedimiento a seguir.

En esta tesis de máster se han estudiado y desarrollado conceptos relacionados con el comportamiento a flexión de estructuras hiperestáticas en estado límite último que se ven sometidas a cargas y a deformaciones impuestas. El planteamiento general es que las deformaciones impuestas demandan capacidad de deformación en las estructuras en estado límite último, y las secciones críticas deben ser capaces de asumir dichas deformaciones de manera que su resistencia total frente a cargas no se vea afectada.

La demanda de rotación plástica en las secciones críticas plastificadas debido a ambos efectos se ha definido como "rotación plástica efectiva", y su valor debe ser igual o menor que la capacidad máxima de rotación de las rótulas, para que las deformaciones impuestas no actúen en detrimento de la capacidad última de la estructura. Se ha descrito una metodología para el cálculo de las demandas de rotación plástica en las rótulas que se forman hasta llegar al mecanismo de colapso de la estructura, y determinar cuándo puede verse afectada la resistencia última de la estructura por el efecto de alguna acción geométrica.

También se ha estudiado el comportamiento en servicio de las estructuras frente a cargas y deformaciones impuestas, y cómo afecta la consideración de la rigidez fisurada al momento de cuantificar los esfuerzos generados por las acciones geométricas. Se ha propuesto una expresión adimensional que permite realizar la verificación del estado límite de fisuración considerando la rigidez fisurada, incluyendo la contribución del hormigón traccionado entre fisuras en aquella y en el cálculo de la tensión de la armadura. Además, los resultados de dicha expresión han sido representados en gráficos que pueden utilizarse directamente sin la necesidad de calcular la expresión completa.

Se ha presentado un ejemplo de aplicación donde se recogen todos los conceptos estudiados a lo largo del trabajo para que puedan ser aplicados en la práctica habitual del proyectista. Se constata que el procedimiento desarrollado, aparte de constituir un marco teórico riguroso para el proyecto bajo cargas y deformaciones impuestas, permite reducciones considerables del armado, logrando las prestaciones requeridas por la normativa vigente.

Contenido

1. INTRODUCCIÓN.....	9
1.1. MOTIVACIÓN.....	9
1.2. OBJETIVOS.....	11
1.3. CONTENIDO DEL DOCUMENTO.....	12
2. ESTADO DEL CONOCIMIENTO.....	14
2.1. COMPORTAMIENTO NO LINEAL DE ESTRUCTURAS DE HORMIGÓN ARMADO.....	14
2.1.1. Comportamiento en servicio.....	16
2.1.2. Comportamiento en rotura por flexo-compresión.....	18
2.1.3. Diagramas momento-curvatura de secciones de hormigón armado.....	20
2.2. MÉTODOS DE CÁLCULO DE ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS EN ESTADO LÍMITE ÚLTIMO.....	25
2.2.1. Cálculo lineal elástico.....	25
2.2.2. Cálculo plástico con rotaciones limitadas.....	25
2.2.3. Método de las rotaciones impuestas (Macchi).....	26
2.2.4. Método de las rotaciones últimas (Baker).....	26
2.2.5. Cálculo lineal con redistribución limitada.....	27
2.2.6. Diseño no lineal de estructuras hiperestáticas.....	30
2.2.7. Cálculo de rotaciones requeridas en rótulas plásticas.....	32
2.3. DIMENSIONAMIENTO Y COMPROBACIÓN DE ARMADURAS EN ESTADO LÍMITE ÚLTIMO.....	36
2.3.1. Tratamiento en el Eurocódigo EC2 y Normativa Española EHE-08.....	36
2.3.2. Tratamiento del ACI-318.....	40
2.4. COMPROBACIÓN DE LOS ESTADOS LÍMITE DE FISURACIÓN Y DEFORMACIONES.....	42
2.4.1. Tratamiento en el Eurocódigo EC2 para ELS.....	42
2.4.2. Tratamiento del ACI-318 para el ELS.....	45
2.4.3. Tratamiento de la normativa española EHE-08 para verificación del ELS.....	48
2.4.4. Tratamiento del Código Modelo 2010 para el ELS.....	51
2.5. CONCLUSIONES SOBRE EL ESTADO DEL CONOCIMIENTO.....	54
3. PROPUESTA DE METODOLOGÍA DE CÁLCULO EN ESTADO LÍMITE ÚLTIMO.....	56
3.1. CONCEPTO DE ROTACIÓN PLÁSTICA EFECTIVA.....	56
3.2. METODOLOGÍA DE DISEÑO NO LINEAL EN ESTADO LÍMITE ÚLTIMO FRENTE A CARGAS Y DEFORMACIONES IMPUESTAS.....	59
3.2.1. Rigidez fisurada.....	59
3.2.2. Rótulas plásticas en zonas de momentos negativos.....	65
3.2.3. Rótulas plásticas en zonas de momentos positivos.....	75
3.2.4. Resumen general de la metodología para el análisis del efecto de las deformaciones impuestas en el estado límite último de la estructura.....	89
4. PROPUESTA DE METODOLOGÍA DE VERIFICACIÓN DEL ESTADO LÍMITE DE FISURACIÓN	92
4.1. INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO EN SERVICIO FRENTE A DEFORMACIONES IMPUESTAS.....	92
4.2. CARACTERIZACIÓN DE LAS ACCIONES INDIRECTAS.....	93
4.3. VERIFICACIÓN DEL ESTADO LÍMITE DE FISURACIÓN. CONTROL DEL ANCHO DE FISURA.....	93
4.4. CÁLCULO DEL MOMENTO FLECTOR DEBIDO A LA DEFORMACIÓN IMPUESTA.....	95
4.5. DESARROLLO DE ECUACIÓN ADIMENSIONAL Y GRÁFICOS PARA DETERMINAR EL ANCHO DE FISURA.....	100
5. EJEMPLO PRÁCTICO DE APLICACIÓN DE LOS CONCEPTOS ESTUDIADOS.....	103
5.1. INTRODUCCIÓN Y PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	103
5.2. CARGAS CONSIDERADAS.....	105
5.3. COMBINACIONES DE CARGA, COEFICIENTES DE SEGURIDAD Y COEFICIENTES DE SIMULTANEIDAD.....	106
5.4. ENVOLVENTES DE ESFUERZOS EN LAS DIFERENTES COMBINACIONES DE ESFUERZOS.....	107

5.5.	DIMENSIONAMIENTO TRADICIONAL DE LAS ARMADURAS Y COMPROBACIÓN DE LA FISURACIÓN.....	108
5.6.	ANÁLISIS Y COMPORTAMIENTO NO LINEAL DE LA ESTRUCTURA.....	112
5.6.1.	<i>Determinación de la carga última de rotura según el cálculo plástico.....</i>	<i>113</i>
5.6.2.	<i>Determinación de las demandas de rotación plástica.....</i>	<i>116</i>
5.7.	PROPUESTA DE ARMADO ASUMIENDO REDISTRIBUCIÓN DE MOMENTOS.....	122
5.7.1.	<i>Determinación de la nueva ley de momentos flectores.....</i>	<i>123</i>
5.7.2.	<i>Dimensionamiento de las armaduras según los esfuerzos redistribuidos.....</i>	<i>124</i>
5.7.3.	<i>Determinación de la carga última de agotamiento.....</i>	<i>127</i>
5.7.4.	<i>Cálculo de las demandas de rotación plásticas en las secciones.....</i>	<i>129</i>
6.	CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS	132
6.1.	CONCLUSIONES GENERALES	132
6.2.	CONCLUSIONES ESPECÍFICAS.....	133
6.3.	RECOMENDACIONES PARA FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN.....	135
7.	REFERENCIAS	136
8.	ANEXOS	138

INDICE DE FIGURAS

Figura 1. Curvas típicas de la relación tensión-deformación del hormigón. [1]	15
Figura 2. Curvas típicas Tensión-Deformación de aceros con diferente límite elástico. [4]	15
Figura 3. Comportamiento teórico N- $\Delta L/L$ de un elemento sometido a tracción centrada. [2]	16
Figura 4. Comparación de tensiones iniciales en el acero con respecto a las diferidas. [2]	18
Figura 5. Formación de mecanismo de colapso en estructura hiperestática y redistribución.	19
Figura 6. Redistribución de momentos en el apoyo y el punto de la carga concentrada. [19]	20
Figura 7. Diagrama momento-curvatura simplificado de una sección de hormigón armado. [1]	21
Figura 8. Sección homogeneizada. [4]	22
Figura 9. Sección fisurada homogeneizada. [4]	23
Figura 10. Redistribución permitida de momentos en función de la deformación unitaria neta. [3]	28
Figura 11. Rotaciones plásticas admisibles en función de la profundidad relativa de la fibra neutra en rotura. [20]	29
Figura 12. Superposición de los dos análisis lineales de la estructura para estimar el estado final en régimen no lineal.	30
Figura 13. Viga continua ejemplo de tres vanos con rótulas plásticas en los apoyos centrales.	33
Figura 14. Momentos flectores resultantes.	33
Figura 15. Variaciones de momento flector de X_i y X_k	35
Figura 16. Dominios de deformación de una sección.	37
Figura 17. Análisis seccional simplificado con el bloque rectangular de compresiones.	38
Figura 18. Bloque rectangular equivalente de tensiones en el hormigón, adoptado por el ACI-318.	40
Figura 19. Definición del área eficaz de hormigón a tracción presentadas por la normativa EHE-08.	49
Figura 20. Definición del área efectiva de hormigón a tracción según el Código Modelo 2010.	53
Figura 21. Representación de la longitud plástica en rótulas de zonas de vano y de apoyos.	57
Figura 22. Viga simplemente apoyada de rigidez discontinua.	61
Figura 23. Rigidez equivalente en caso de rótulas plásticas en el vano.	62
Figura 24. Rigidez equivalente para tramos con 3 rigideces distintas y formación de rótulas en las zonas de apoyo.	63
Figura 25. Rigidez equivalente para tramos con tres rigideces distintas y formación de rótulas plásticas en las zonas de vano.	63
Figura 26. Viga continua de dos vanos iguales.	65
Figura 27. Vano aislado, sometido a sus esfuerzos últimos.	66
Figura 28. Esquema del modelo utilizado en CONS.	70
Figura 29. Diagramas momento-curvatura de ambas secciones.	71
Figura 30. Comparación de resultados entre el método propuesto y CONS (I).	74
Figura 31. Diagrama de cuerpo libre del vano, con la rótula plástica a una distancia igual a $0.5L$	75
Figura 32. Esquema de la rotación total de la rótula formada en el vano.	77
Figura 33. Esquema de rótula en vano con carga repartida uniforme en toda longitud.	77
Figura 34. Esquema de rótula en vano con carga uniforme repartida en vano crítico.	78
Figura 35. Esquema de rótula en vano sometida a un gradiente térmico.	78
Figura 36. Rotación plástica en la rótula debido al descenso de apoyo δ'	79
Figura 37. Comparación de resultados entre el método propuesto y CONS (II).	82
Figura 38. Esquema de la estructura analizada y disposición de armaduras.	83
Figura 39. Esquema del modelo utilizado en CONS.	83
Figura 40. Diagramas momento-curvatura de las secciones críticas.	83
Figura 41. Rotación plástica en rótula central debido a la acción de la sobrecarga uniforme sobre el vano intermedio.	86
Figura 42. Rotación plástica de la rótula central debido a la acción del gradiente térmico de temperatura.	86
Figura 43. Resultados del análisis y comparación con el CONS (III).	88
Figura 44. Comparación de resultados entre el método propuesto y CONS (III).	88

Figura 45. Ejemplo de viga de dos vanos sometida a una curvatura impuesta.....	95
Figura 46. Variación del factor η en función del número de vanos.....	97
Figura 47. Ajuste de línea recta del parámetro K_r en función de n_p	99
Figura 48. Gráfico ejemplo para estimar el ancho característico de fisura para los parámetros $\lambda_p=1.5$ y $\eta=1.5$	102
Figura 49. Tablero de puente tipo losa de hormigón armado.....	103
Figura 50. Alzado longitudinal del puente de 64 metros longitud, con luces de 14m y 18m.....	104
Figura 51. Envolvente de momentos flectores para la combinación de estado límite último.....	108
Figura 52. Momentos flectores máximos en secciones críticas para cada una de las combinaciones de acciones.....	108
Figura 53. Diagramas Momento Curvatura de las secciones dimensionadas.....	111
Figura 54. Esquema de la estructura modelada e idealizada en CONS.....	112
Figura 55. Esquema del estado de esfuerzos en el vano crítico considerado al alcanzar el agotamiento.....	113
Figura 56. Cálculo de la sobrecarga última de agotamiento.....	114
Figura 57. Evolución del desplazamiento vertical del centro de vano con el incremento de carga.....	115
Figura 58. Evolución de los momentos flectores con el incremento de carga hasta rotura.....	116
Figura 59. Esquema estructural de la primera etapa, luego de la formación de la primera rótula plástica.....	118
Figura 60. Esquema estructural luego de la formación de las dos rótulas plásticas en los apoyos.....	120
Figura 61. Redistribución de momentos y ley de momentos final propuesta.....	122
Figura 62. Diagramas momento curvatura de las nuevas secciones dimensionadas.....	125
Figura 63. Evolución de los momentos flectores con el incremento de la carga.....	128
Figura 64. Evolución del desplazamiento vertical del centro de vano según el incremento de carga.....	128
Figura 65. Esquema de configuración de sobrecarga para promover la formación de la primera rótula plástica en el vano.....	131
Figura 66. Esquema mostrando el efecto del gradiente térmico positivo sobre el esquema estructural del puente previo a la formación del mecanismo de colapso.....	131

INDICE DE TABLAS

Tabla 1. Valores para el factor ξ , dependiente del tiempo. [3].....	17
Tabla 2. Variación de los parámetros η y λ en función de la profundidad de la fibra neutra.....	37
Tabla 3. Variación de los parámetros η y λ según la resistencia del hormigón.....	38
Tabla 4. Valores máximos de anchos de fisuras recomendados por el Eurocódigo EC2.....	43
Tabla 5. Deflexiones máximas admisibles establecidas por el ACI-318-14.....	47
Tabla 6. Valores máximos admisibles de anchos de fisura establecidos en la EHE-08.....	48
Tabla 7. Relaciones luz/canto útil mínimas establecidas por la normativa española EHE-08 para el control de flechas.....	50
Tabla 8. Anchos límite de fisura establecidos por el Código Modelo 2010.....	51
Tabla 9. Valores de los coeficientes τ_{bms} , β y η_r establecidos en el Código Modelo 2010.....	53
Tabla 10. Propiedades de los materiales utilizados.....	71
Tabla 11. Propiedades de las secciones calculadas.....	72
Tabla 12. Resultados del análisis y comparación con el CONS. (I).....	73
Tabla 13. Resultados del análisis y comparación con el CONS (II).....	81
Tabla 14. Propiedades de los materiales utilizados.....	84
Tabla 15. Propiedades mecánicas de las secciones calculadas.....	84
Tabla 16. Valores del coeficiente η para estructuras continuas sometidas a una curvatura uniforme sobre toda su longitud.....	96
Tabla 17. Propiedades de la sección del tablero.....	104
Tabla 18. Propiedades de la sección losa del tablero.....	104
Tabla 19. Propiedades de los materiales considerados en el ejemplo.....	105

Tabla 20. Valores y configuración de la sobre carga de tráfico y vehículo pesado.	106
Tabla 21. Coeficientes de seguridad de las acciones para la comprobación en los estados límites últimos.	107
Tabla 22. Coeficientes de simultaneidad para los valores de combinación de las acciones variables.	107
Tabla 23. Resultado del dimensionamiento de las armaduras.	109
Tabla 24. Verificación del estado límite de fisuración.	110
Tabla 25. Puntos de plastificación y de rotura de las secciones armadas.	111
Tabla 26. Cálculo de la rigidez equivalente del vano.	119
Tabla 27. Cálculo de la demanda geométrica en ambas rótulas plásticas.	121
Tabla 28. Resultados del dimensionamiento de las armaduras según los nuevos esfuerzos considerados.	124
Tabla 29. Puntos de plastificación y de rotura de las secciones armadas. (II)	125
Tabla 30. Momentos flectores para las combinaciones de ELS, considerando la rigidez fisurada en las acciones de deformaciones impuestas.	126
Tabla 31. Verificación del estado límite de fisuración asumiendo rigidez fisurada.	126
Tabla 32. Resultados del cálculo de la sobrecarga última que agota la estructura.	127
Tabla 33. Cálculo de la rigidez equivalente del vano estudiado.	129
Tabla 34. Demanda de rotación plástica debido a las cargas sobre las secciones críticas hasta formar el mecanismo de colapso.	129

1. INTRODUCCIÓN

1.1. Motivación

Desde un punto de vista general, es conocido que las estructuras pueden verse sometidas a dos tipos de acciones: acciones directas (Cargas) y acciones indirectas (Deformaciones Impuestas).

Dentro del primer tipo de acciones se encuentran las siguientes:

- Las acciones permanentes, que estarán presentes durante toda la vida útil de la estructura. (Peso propio de los elementos estructurales y no estructurales)
- Las acciones permanentes de valor no constante (pretensado)
- Cargas variables tales como sobrecargas de uso (tráfico, personas, empuje de agua), empuje de tierras, viento, nieve, impacto, entre otras.

Dentro de las deformaciones impuestas, se encuentran los efectos térmicos (dilataciones, contracciones, curvaturas), los movimientos relativos de los apoyos y los efectos diferidos debido a la retracción y la fluencia del hormigón.

En el análisis estructural se trata en obtener, de la manera más práctica y realista posible, los efectos que ejercen las acciones sobre la estructura, tales como los esfuerzos internos, reacciones, tensiones y deformaciones. No debe olvidarse que deben satisfacerse las condiciones de equilibrio, la compatibilidad de deformaciones y desplazamientos, así como las relaciones constitutivas de los distintos materiales. A través del diseño estructural, en función de las características geométricas, materiales y refuerzo dispuesto, se busca que la respuesta interna de la estructura sea superior a la solicitud o demanda que se haya determinado en el análisis estructural.

Desde el punto de vista de las cargas, se generan reacciones en los apoyos que deben mantenerse en equilibrio con las acciones. Con dichas cargas se generan esfuerzos internos en la estructura que se encuentran equilibrados con las tensiones, y que se relacionan con las deformaciones a través de las ecuaciones constitutivas del material. Asimismo, estas deformaciones producen desplazamientos que deben ser compatibles con las restricciones de los apoyos. Resulta evidente decir que, en el caso de acciones directas, la respuesta de la estructura es proporcionar resistencia frente a las cargas, garantizar el equilibrio y también deben limitarse las fisuras, deformaciones y vibraciones.

Por otro lado, en el caso de acciones indirectas, la demanda a la que se somete la estructura es a una deformación impuesta, considerándose estas como acciones geométricas. Por lo tanto, estas acciones no demandan resistencia a la estructura, sino capacidad para acomodar dichas deformaciones impuestas, manteniendo su integridad estructural.

Por lo general, en la práctica habitual de la ingeniería estructural siempre se ha dado especial importancia a los efectos de las acciones directas o cargas, la mayoría de las veces menospreciando el efecto que tienen las acciones indirectas sobre la estructura y cómo estas influyen en la respuesta estructural en el estado límite último de la estructura. Sin embargo, las deformaciones impuestas pueden producir importantes efectos de fisuración, pérdida de rigidez y tensiones considerables en las armaduras, afectando así la durabilidad, las deformaciones y el aspecto estético incluso.

En el caso de estructuras hiperestáticas, las deformaciones impuestas generan esfuerzos de compatibilidad debido a las coacciones de los apoyos. El valor de estos esfuerzos va a depender del valor de la acción, la luz y la rigidez seccional. Un ejemplo de esto podría consistir en una viga continua de dos vanos, sometida a un descenso en su apoyo central " δ ", genera un momento flector positivo igual a $M=3K\delta/L^2$, siendo K la rigidez de la sección, cuyo valor sin fisurar es la rigidez elástica. Obviamente, si la estructura se fisura, el valor de los esfuerzos de compatibilidad se verá reducida de manera proporcional a la reducción de rigidez. Por lo tanto, si el refuerzo de la estructura fue diseñado para soportar estos esfuerzos considerando la rigidez sin fisurar, se estaría sobredimensionando la estructura. Esto también conllevaría que, a mayor armadura, la estructura sería menos dúctil y flexible para lograr acomodar la deformación impuesta.

En estado límite último, cuando se ha alcanzado un alto nivel de tensiones, la estructura alcanza grandes niveles de fisuración y mucha pérdida de rigidez, pudiendo abrir la posibilidad de que se produzca plastificación de alguna de las armaduras en algún punto de la estructura, conocida como sección crítica. En estas secciones es donde se forman lo que se conoce como rótulas plásticas, las cuales son zonas de la estructura que pueden asumir grandes rotaciones sin un incremento apreciable de momento flector, y esto dependerá de la ductilidad de la sección.

En conclusión, es lógico afirmar que las estructuras deben ser lo suficientemente rígidas como para resistir las cargas, evitando la fisuración y deformaciones excesivas, pero también deben contar con suficiente flexibilidad y ductilidad para acomodar las deformaciones impuestas en servicio y en rotura.

En el estado actual del conocimiento, este aspecto no ha sido tratado con suficiente profundidad, y de ello se deriva la existencia de contradicciones en el tratamiento que ofrecen las diversas normativas sobre los efectos de las deformaciones impuestas en situaciones de servicio y de estado límite último, lo cual afecta a la funcionalidad, durabilidad, seguridad y coste de las estructuras.

1.2. Objetivos

El objetivo general de este trabajo es estudiar en detalle el comportamiento en servicio y en rotura de las estructuras hiperestáticas de hormigón armado sometidas simultáneamente a cargas y a deformaciones impuestas, con la finalidad de definir las bases para un diseño racional de las mismas.

Se plantean además los siguientes objetivos específicos:

- Desarrollar una metodología para el diseño de no lineal de estructuras hiperestáticas en ELU, que incorpore los efectos de las cargas y las deformaciones impuestas.
- Desarrollar una metodología para verificar los ELS de fisuración en estructuras sometidas a cargas y a deformaciones impuestas.
- Proponer criterios cualitativos para el diseño de estructuras bajo cargas y deformaciones impuestas.

1.3. Contenido del documento

El Capítulo 1 del presente documento corresponde a la introducción, a través de la cual se ha dado una breve pincelada sobre los efectos que ejercen los diferentes tipos de acciones sobre estructuras hiperestáticas, planteando la problemática que proviene de estrategias cuestionables en el momento de tomar en cuenta las deformaciones impuestas en el diseño de las armaduras de la estructura.

En el Capítulo 2 se ha desarrollado el estado del conocimiento acerca de temas relacionados con el comportamiento no lineal de las estructuras tanto en servicio como en rotura, métodos de cálculo de estructuras hiperestáticas, y metodologías de dimensionamiento/comprobación de las diferentes normativas a nivel internacional.

El Capítulo 3 pertenece a la presentación del concepto de rotación plástica efectiva, que busca tomar en cuenta los efectos de las deformaciones impuestas en la capacidad de deformación de la estructura, y una propuesta metodológica para el cálculo en estado límite último tomando en cuenta el efecto de las cargas y las deformaciones impuestas. También se desarrollan varios ejemplos aplicados para demostrar el efecto de las deformaciones impuestas en la carga última de agotamiento, así como los cálculos necesarios para llevar a cabo el análisis. Los resultados se comparan con análisis no lineal con ayuda del software informático CONS. Finalmente se define un procedimiento cualitativo a seguir para tomar en cuenta el efecto de las deformaciones impuestas en estado límite último.

En el Capítulo 4 se trata el tema del comportamiento en servicio de las estructuras frente a cargas y acciones geométricas. Se hace una propuesta para el cálculo del ancho de fisura característico considerando la rigidez fisurada en la cuantificación de los esfuerzos generados por la deformación impuesta, por medio de una ecuación adimensional, así también como por medio de gráficos generados con diferentes parámetros que dependerán del caso en estudio.

El Capítulo 5 comprende un ejemplo de aplicación que consiste en el dimensionamiento de la armadura longitudinal de flexión de un puente continuo de 4 vanos sometido a las cargas de diseño y un gradiente térmico. Se hace una propuesta de armado empleando la práctica habitual para el dimensionamiento en estado límite último, y la verificación del estado límite de fisuración.

Una segunda propuesta se desarrolla asumiendo un nivel de distribución de esfuerzos deseado, y además verificando el estado límite de fisuración considerando la rigidez fisurada equivalente de la estructura. Para ambas propuestas se estudia su capacidad última de resistencia, las rotaciones plásticas efectivas para cada una de las rótulas, y el efecto de la curvatura impuesta por el gradiente térmico sobre la capacidad total de la estructura.

En el Capítulo 6 se desarrollan las conclusiones principales que se han podido alcanzar a partir de los resultados obtenidos y conceptos desarrollados.

2. ESTADO DEL CONOCIMIENTO

2.1. Comportamiento no lineal de estructuras de hormigón armado

Aunque en la práctica común y a lo largo de la historia se ha trabajado con el hormigón armado a partir de resultados obtenidos de un análisis lineal elástico, estas estructuras en la realidad presentan un marcado comportamiento no lineal cuando se ven sometidas a las acciones.

El comportamiento no lineal de las estructuras de hormigón se debe a varios factores relacionados tanto con los materiales como con las características mecánicas y geométricas.

El hormigón por sí solo se comporta de manera elástico-lineal hasta que se somete aproximadamente a un 40% de su resistencia a compresión, cuando su relación tensión-deformación empieza a ser claramente no lineal. Importante también es destacar la gran diferencia de la capacidad mecánica del hormigón en compresión y en tracción. Su baja capacidad para soportar esfuerzos de tracción lo hacen muy susceptible a fisurarse, produciendo cambios repentinos en la rigidez de la estructura conforme va aumentando el nivel de cargas aplicadas. En la figura 1 se observa la respuesta no lineal del hormigón sometido a compresión uniaxial.[1]

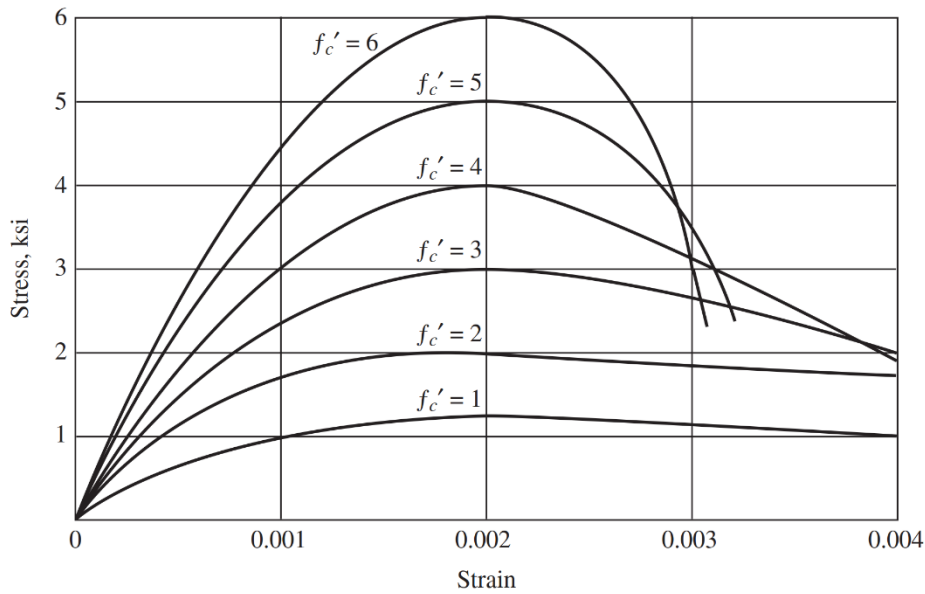


Figura 1. Curvas típicas de la relación tensión-deformación del hormigón. [1]

En cuanto al acero se refiere, es bien conocido que su comportamiento es lineal hasta que se alcanza su límite elástico. Una vez que el acero plastifica, las deformaciones aumentan enormemente con muy poco aumento de la carga aplicada, tal como se muestra en la figura 2. La pérdida de adherencia en la interfaz hormigón-acero, también es una razón de comportamiento no lineal en estas estructuras.

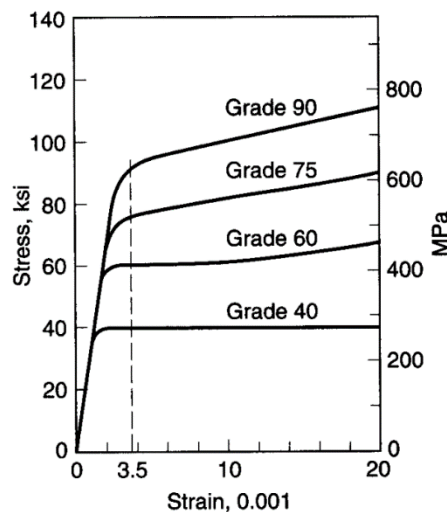


Figura 2. Curvas típicas Tensión-Deformación de aceros con diferente límite elástico. [4]

Los efectos de segundo orden debido a las imperfecciones geométricas, y los elementos esbeltos resistiendo esfuerzos de compresión dan lugar a lo que se conoce como no linealidad geométrica, donde los esfuerzos que resiste la estructura ya dejan de ser proporcionales a la carga, y varían con la configuración deformada de la estructura.

El comportamiento diferido del hormigón debido a sus características reológicas produce fenómenos de retracción y fluencia que afectan significativamente las deformaciones a largo plazo, y la fisuración de los elementos.

Otros factores, no menos importantes, que intervienen en el comportamiento no lineal se encuentran los problemas de contacto en los apoyos, que muchas veces no transmiten esfuerzos de tracción.

2.1.1. Comportamiento en servicio

En servicio, las estructuras de hormigón generalmente pasan por dos fases principales. En primer lugar, por la fase elástica, en la cual ninguna sección de hormigón no ha fisurado y, por lo tanto, la estructura se deforma según su rigidez elástica íntegra. Cuando las tensiones en el hormigón alcanzan su resistencia a tracción la pieza comienza a fisurarse y se inicia la fase fisurada. Las fisuras se propagan, las tensiones en el acero aumentan significativamente por donde pasa la fisura, y el eje neutro se ve obligado a subir, incrementando también las tensiones en el hormigón.

En la figura 3 se aprecia la evolución del comportamiento de un tirante de hormigón sometido a un esfuerzo axial de tracción desde su primer estado sin fisuración alguna, pasando por la fase de formación de fisuras, y por último alcanzando un estado en el cual la fisuración se estabiliza, deformándose la pieza con una rigidez menor a la inicial.[2]

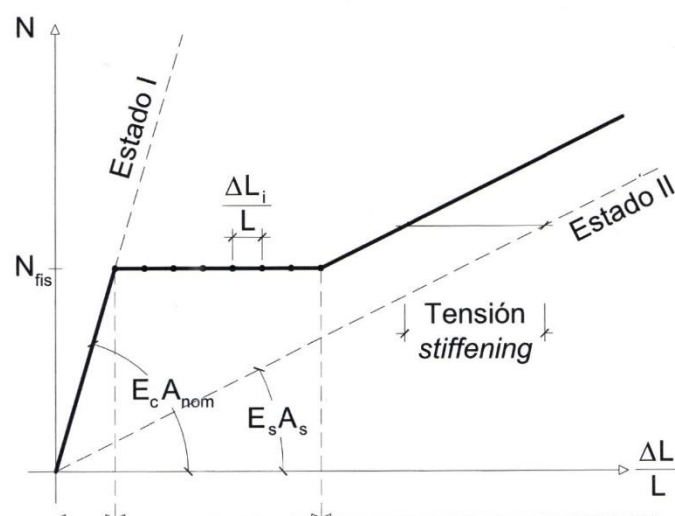


Figura 3. Comportamiento teórico $N-\Delta L/L$ de un elemento sometido a tracción centrada. [2]

Como producto de la fisuración en las zonas de mayor demanda es cuando entra en juego el comportamiento no lineal en servicio, pues esto da lugar a que se generen distribuciones de esfuerzos desde las zonas que se están fisurando, a zonas con menos demanda, en estructuras hiperestáticas.

En cuanto al control de deformaciones se refiere, las flechas diferidas debido a la retracción y la fluencia del hormigón son otro factor importante en el comportamiento no lineal de la estructura en servicio. La retracción no uniforme (bien por las condiciones termo-higrométricas varían de unos puntos a otros, bien por la presencia de armadura asimétrica) produce flechas diferidas independientes de la tensión aplicada. La fluencia produce flechas diferidas bajo el efecto de cargas de larga duración, y va a depender de la magnitud de la carga sostenida, del momento de aplicación de la carga y del tiempo de duración que permanezca dicha carga aplicada. El cálculo exacto de estos fenómenos resulta ser inaplicable en la práctica, por lo que se estiman a través de procedimientos simplificados a partir de las flechas instantáneas.

Tanto el código del ACI como la instrucción española EHE-08 proponen multiplicar la flecha instantánea por un factor λ , que depende de la duración de las cargas permanentes a través de un factor ξ , y de la cuantía de armadura de compresión ρ' .

$$\lambda = \frac{\xi}{1 + 50 * \rho'} \quad (1)$$

Los valores de ξ se pueden encontrar en la siguiente tabla extraída de la norma ACI 318S-14.

Duración de la carga sostenida (meses)	Factor dependiente del tiempo (ξ)
3	1.0
6	1.2
12	1.4
60 o más	2.0

Tabla 1. Valores para el factor ξ dependiente del tiempo. [3]

Como producto del comportamiento diferido del hormigón, las tensiones de la armadura y el hormigón también se modifican a lo largo del tiempo. En la figura 4 se presenta cómo en un principio las tensiones en el acero crecen significativamente

en los puntos por donde pasan las fisuras. Por efecto de la fluencia del hormigón, la tensión en el acero tiende a crecer y a homogeneizarse.

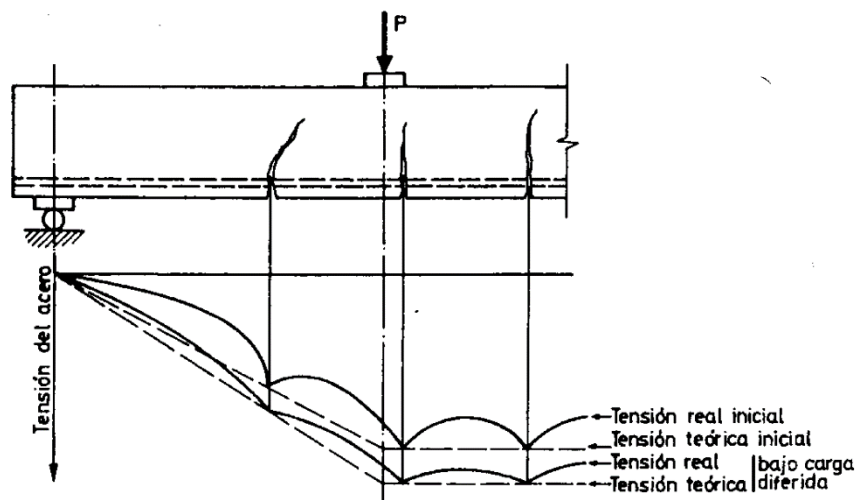


Figura 4. Comparación de tensiones iniciales en el acero con respecto a las diferidas. [2]

2.1.2. Comportamiento en rotura por flexo-compresión.

En estructuras estáticamente determinadas, los esfuerzos a los que se ve sometida la estructura no dependen de su rigidez, ni de los materiales, sino únicamente de las condiciones de equilibrio entre cargas y reacciones. Como no existen coacciones de apoyos que sean incompatibles con las deformaciones, no hay redistribución de esfuerzos y, además, se mantiene la proporcionalidad entre las cargas y los esfuerzos.

El comportamiento estructural no se presenta tan simple cuando se trata de estructuras hiperestáticas, ya que la rigidez a lo largo de toda la estructura influye en la distribución de los esfuerzos. En estos casos las zonas más rígidas asumirán mayores esfuerzos que las zonas menos rígidas. Como efecto directo de esto que se ha explicado anteriormente, cuando la fisuración se inicia en alguna región de la estructura, la rigidez de esta zona se ve disminuida significativamente, llevando a que se produzcan redistribuciones de esfuerzos a las zonas menos fisuradas.

Según continúa el incremento de carga, llega un punto en el que se alcanza la plastificación del acero. Como la rigidez de las secciones fisuradas depende de la cuantía de armadura, cuando esta plastifica, la sección pierde casi toda su rigidez pasando a ser lo que se denomina una rótula plástica. Esta sección ya no será capaz de asumir más esfuerzos según se incremente la carga, (excepto el pequeño incremento de momento debido al aumento del brazo mecánico, a igualdad de fuerza de tracción o compresión).

Sin embargo, sí deberá ser capaz de asumir rotaciones considerables. Por razones de compatibilidad de equilibrio, los esfuerzos deberán ser soportados por las regiones de mayor rigidez de la estructura, dando lugar a la redistribución de esfuerzos.

En la figura 5 se aprecia como en una estructura hiperestática, teóricamente, su colapso conlleva la formación de un número determinado de rótulas plásticas, que dependerá del grado de indeterminación de la estructura y, por consiguiente, a una redistribución de los esfuerzos finales.

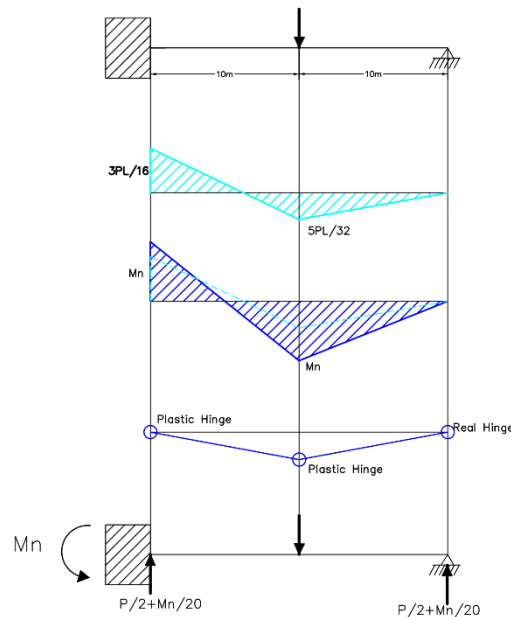


Figura 5. Formación de mecanismo de colapso en estructura hiperestática y redistribución.

Debido a este fenómeno en el comportamiento de estructuras estáticamente indefinidas, el colapso de éstas no se produce cuando se alcanza la resistencia de una de sus secciones, sino cuando se forman suficientes rótulas plásticas como para formar un mecanismo de colapso, o cuando se agote la capacidad de rotación plástica de una de las rótulas. En el segundo caso, se produciría lo que se conoce como redistribución parcial. A este alcance o capacidad más allá de la propia resistencia seccional que tienen las estructuras hiperestáticas para soportar incrementos de carga, se le conoce comúnmente como reserva de resistencia.

En la figura 6 se aprecia una representación de la evolución del momento negativo en los apoyos empotrado y el momento positivo en el punto de aplicación de la carga. Se observa cómo a través del fenómeno de redistribución los momentos últimos son muy diferentes a los que se obtienen por análisis lineal elástico.

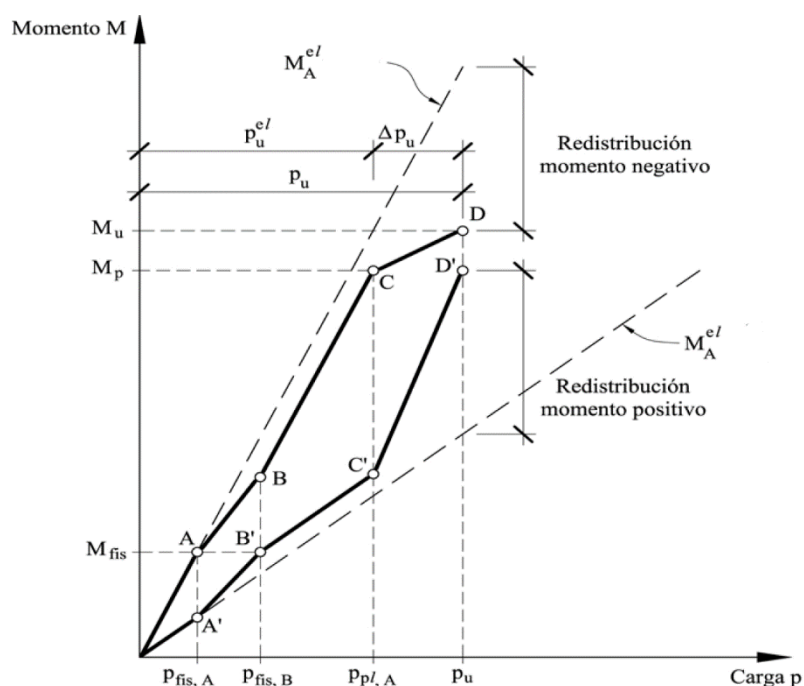


Figura 6. Redistribución de momentos en el apoyo y el punto de la carga concentrada. [19]

Los puntos D y D' representan el momento en el que se ha producido el colapso de la estructura debido a la formación de un mecanismo de colapso por la formación de dos rótulas plásticas, o debido al agotamiento de la capacidad de rotación plástica en la primera rótula que se ha formado en el empotramiento. Cualquiera de los dos que fuera el caso, es evidente que la capacidad final P_u , es mayor que la capacidad elástica de la sección P_u^{el} . Esta diferencia comúnmente se representa como ΔP y es la reserva de capacidad plástica de la estructura.

2.1.3. Diagramas momento-curvatura de secciones de hormigón armado

La relación momento-curvatura de secciones de hormigón armado resulta ser de gran importancia en el estudio de la ductilidad del miembro, el entendimiento del desarrollo de rótulas plásticas y la redistribución de momentos que ocurre en la mayoría de estructuras de hormigón armado antes de colapsar.[4]

Esta relación, representada de manera gráfica, muestra de forma integrada el comportamiento de una sección, según se somete ésta a un momento flector que se va incrementando gradualmente. Para esto, hay que basarse en las relaciones tensión-deformación del hormigón y el acero, así como también en la hipótesis de la permanencia de las secciones planas, la adherencia perfecta entre ambos materiales y la satisfacción del equilibrio entre tensiones y esfuerzos (axil y momento).

Para fines prácticos, la elaboración diagrama momento-curvatura se limita a la obtención de tres puntos principales que marcan el comportamiento de la sección a los distintos niveles de carga. Estos puntos son:

- Punto de fisuración
- Punto de plastificación
- Punto de rotura

En la figura 7 se muestra un ejemplo de un diagrama momento-curvatura simplificado, que consta de tres líneas rectas de diferente pendiente, y cuyos límites son los puntos antes mencionados.

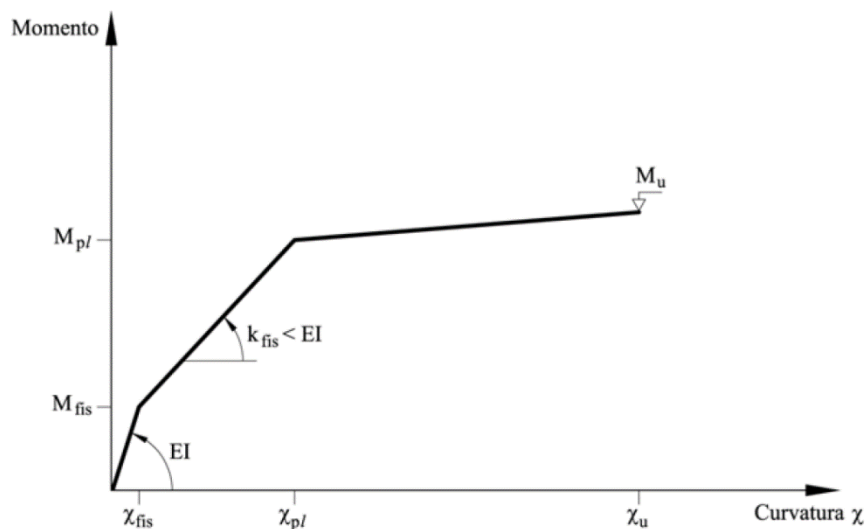


Figura 7. Diagrama momento-curvatura simplificado de una sección de hormigón armado. [1]

A continuación, se explicará brevemente el concepto y obtención de cada punto:

- a. Punto de fisuración: este punto corresponde al momento en el cual las tensiones en la fibra más traccionada del hormigón alcanzan su resistencia a tracción, abriendo paso a la formación de fisuras. A partir de este punto la resistencia a tracción del hormigón ya se debe considerar.

Para la obtención del momento de fisuración puede utilizarse la inercia bruta de la sección considerándose rectangular, o también, homogeneizando la sección, convirtiendo el área de acero en un área equivalente de hormigón.

En el segundo caso, además de la inercia del rectángulo de hormigón, se incluye la inercia de un área igual a $A_s(n-1)$, ubicada en el centro de gravedad del refuerzo a tracción de la sección, tal como se muestra en la figura 8.

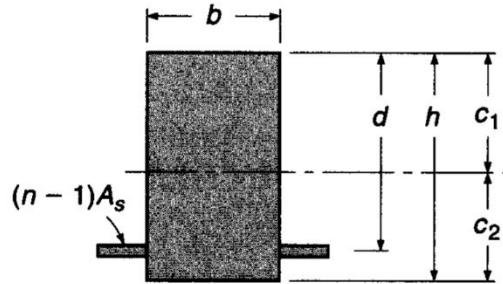


Figura 8. Sección homogeneizada. [4]

El momento de fisuración se calculará entonces de la manera:

$$M_{fis} = \frac{f_{ct} * I}{C_2} \quad (2)$$

Donde C_2 es la distancia desde el centro de gravedad de la sección hasta la fibra extrema traccionada del hormigón.

Entonces, la curvatura correspondiente a este punto se calcula de la siguiente manera:

$$\phi_{fis} = \frac{f_{ct}}{E_c * C_2} = \frac{\epsilon_{ct}}{C_2} \quad (3)$$

- b. Punto de plastificación: es el punto en el cual se considera que la sección ha plastificado a razón de que la armadura a tracción ha alcanzado su límite elástico, o también porque el hormigón ha entrado en una zona de respuesta plástica. Un umbral ampliamente aceptado es que se llega a este punto cuando el hormigón alcanza una deformación de $\epsilon_{cp}=0.0015$.

Para el cálculo de este punto, se debe considerar la rigidez fisurada planteando la sección tal como se muestra en la figura 9.

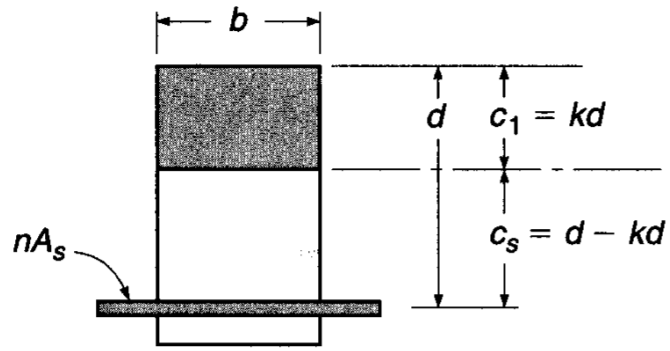


Figura 9. Sección fisurada homogeneizada. [4]

La curvatura de plastificación se tomará como la menor entre:

- Plastificación del acero:

$$\varphi_{ys} = \frac{\varepsilon_y}{(d - kd)} \quad (4)$$

- Plastificación del hormigón:

$$\varphi_{yc} = \frac{\varepsilon_{cp}}{kd} \quad (5)$$

El valor de $C_1 = kd$ se calcula planteando igualdad de momentos estáticos de área entre el bloque a compresión y la armadura de acero a tracción, y se obtiene la siguiente expresión, en el caso de una sección rectangular, con armadura de tracción y de compresión.

$$kd = dn\rho \left(1 + \frac{\rho}{\rho'}\right) \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{2 \left(1 + \frac{\rho' d'}{\rho d}\right)}{n\rho \left(1 + \frac{\rho'}{\rho}\right)}} \right] \quad (6)$$

Por consiguiente, el momento de plastificación se calculará con la expresión:

$$M_y = E_c I_f \varphi_y \quad (7)$$

- c. Punto de rotura: en este punto es cuando se produce el agotamiento de la sección y ya ha agotado su capacidad máxima de rotación plástica. En este caso se considera una distribución plástica de tensiones, y para facilitar los cálculos, una distribución uniforme rectangular de tensiones en el hormigón.

La profundidad del bloque de compresiones se determina como:

$$y = \frac{A_s f_y - A'_s f_y}{f_c b} \quad (8)$$

Y por lo tanto la profundidad de la fibra neutra:

$$x = \frac{y}{0.8} = 1.25 * y \quad (9)$$

Esta claro que esta sería una primera estimación de la profundidad del bloque a compresión, ya que no necesariamente la armadura de compresión ha alcanzado su límite elástico. Lo que debe hacerse es un proceso iterativo en el cual se verifica si la deformación del acero a tracción y compresión, cuando el hormigón alcanza $\epsilon_u=0.0035$, supere o no su deformación de cedencia. Si se da el caso en el que la armadura a compresión no ha plastificado, entonces se recalcula la profundidad del bloque de compresiones con la tensión de la armadura que se ha obtenido de acuerdo con la deformación.

$$\epsilon_s = \frac{\epsilon_u}{x} * (d - x) \quad ; \quad \epsilon'_s = \frac{\epsilon_u}{x} * (x - d') \quad (10)$$

Cuando ya se establezca el valor de la profundidad del eje neutro a través de varias iteraciones, se calcula la curvatura última de la siguiente manera:

$$\varphi = \frac{\epsilon_u}{x} \quad (11)$$

Por último, el momento de rotura o agotamiento se obtiene:

$$M_u = A_s \sigma_s \left(d - \frac{y}{2} \right) + A'_s \sigma'_s \left(\frac{y}{2} - d' \right) \quad (12)$$

2.2. Métodos de cálculo de estructuras hiperestáticas en Estado Límite Último

2.2.1. Cálculo lineal elástico

Es posiblemente el método de análisis más utilizado en la práctica común. En este método se supone un comportamiento completamente elástico de la estructura, permitiendo considerar proporcionalidad ente las acciones y los efectos que estas producen.[2] Por lo general, se utilizan las rigideces íntegras de los elementos, sin considerar fisuración ni redistribución de esfuerzos. Otras ventajas que implica el análisis lineal elástico son:

- Es válido el principio de superposición.
- El refuerzo de los miembros que componen la estructura no interviene en el análisis ni los resultados.
- Resulta ser un cálculo directo, sin necesidad de hacer iteraciones.
- Provee resultados conservadores en general.

La utilización de este método, en el cual la capacidad última de carga en estado límite último se limita a la carga que alcanza la capacidad de una sección específica, implica despreciar el significativo comportamiento no lineal que ocurre en rotura.[5]

2.2.2. Cálculo plástico con rotaciones limitadas

Estos métodos de cálculo intentan simular un comportamiento plástico de la estructura de hormigón, aunque se está consciente de que éstas en la realidad no son capaces de desarrollar un comportamiento plástico o elastoplástico perfecto. Esto se debe en gran parte a que la capacidad de rotación plástica de las secciones de hormigón es limitada, y puede no lograr formarse el mecanismo de colapso que se obtiene mediante un análisis puramente plástico.

Todos estos métodos deben satisfacer tres condiciones básicas según R.Park & T.Paulay [6]:

- Satisfacer el equilibrio: la distribución de momentos flectores debe ser estáticamente admisible.
- Compatibilidad rotacional: la capacidad de rotación de las regiones de articulación plástica es suficiente para permitir que se desarrolle la distribución supuesta.

- Servicio: el agrietamiento y las deflexiones bajo carga de servicio no son excesivos.

Para llevar a cabo el diseño de estructuras de hormigón tomando en cuenta el comportamiento no-lineal en estado límite último, se han desarrollado varios métodos, entre los cuales se pueden mencionar los desarrollados por: Baker, Macchi, Cohn, Sawyer y Furlong.

Por su nivel de importancia, se dedicará algunas breves explicaciones a los métodos de Macchi y Baker.

2.2.3. Método de las rotaciones impuestas (Macchi)

Este método está basado en el principio de la superposición de la distribución de momentos debido a la carga externa y la distribución de momentos debido a las rotaciones plásticas.[7]

Este método requiere de un proceso iterativo debido a que las rotaciones plásticas no son conocidas en un principio. Los pasos son los siguientes:

1. Calcular la distribución de momentos flectores según la teoría elástica.
2. Para dicha distribución de momentos, determinar las rotaciones plásticas en las rótulas.
3. Calcular la distribución de momentos debido a rotaciones unitarias impuestas en las rótulas.
4. Obtener una ley de momentos como resultado de la superposición de las leyes calculadas en los pasos 1 y 3.
5. Se corrigen los valores de las rotaciones plásticas y luego la distribución de momentos flectores.
6. Se vuelve al paso 2. Se realiza la iteración hasta que la diferencia entre los valores de los momentos entre una iteración y otra no sobrepase un porcentaje de error establecido.

2.2.4. Método de las rotaciones últimas (Baker)

Este método se empezó a desarrollar desde la década de 1940. El diseño está basado en los requerimientos del equilibrio al límite, mientras que los requerimientos de compatibilidad rotacional y servicio se comprueban como pasos posteriores.

En un principio se debe determinar una distribución de momentos flectores máximos que se encuentre equilibrada con las cargas máximas.

Las secciones se dimensionan para esta distribución de momentos máximos obtenida, asumiendo un mecanismo de colapso y que la estructura se comportará plásticamente. Luego, se procede a determinar la capacidad de rotación plástica de cada una de las rótulas, para luego verificarlas con las demandas de rotación plástica de dichas regiones. La capacidad de rotación en las regiones de articulación plástica se comprueba para asegurar que se puede desarrollar la distribución elegida de momentos flectores en la carga máxima[6]. En caso de que alguna de las rótulas no cumple con esta condición, se debe modificar la distribución de momentos eligiendo otro mecanismo de colapso.

2.2.5. Cálculo lineal con redistribución limitada

Básicamente consiste en la determinación de esfuerzos mediante un análisis lineal elástico, para luego efectuar una redistribución de los esfuerzos satisfaciendo las condiciones de equilibrio. El resultado permite disminuir los esfuerzos en las secciones críticas y se aumenta en las secciones menos solicitadas.

Los códigos permiten diferentes porcentajes de redistribución de momentos con respecto al valor obtenido en el análisis lineal elástico. También, se establecen requerimientos mínimos de garantía de ductilidad.

A continuación, se presentará brevemente la propuesta de varias normativas para desarrollar un análisis lineal con redistribución limitada.

- **American Concrete Institute (ACI-318-14)**

El ACI ofrece un método para calcular la redistribución de momentos en elementos continuos sometidos a flexión. Siempre y cuando se cumplan las dos siguientes condiciones, se permite disminuir los esfuerzos calculados por la teoría elástica en las secciones críticas:

- a. Los miembros a flexión son continuos.
- b. ϵ_t debe ser mayor o igual a 0.0075 en la sección donde se reduce el momento.

También se establece que en las secciones donde se considere una reducción del momento, dicha redistribución no puede sobrepasar al menor valor entre $1000 \epsilon_t$ por ciento y 20 por ciento.

Este momento reducido debe utilizarse para calcular los momentos redistribuidos en todas las demás secciones dentro del vano para mantener el equilibrio estático. En el gráfico de la figura 10 se muestra la relación entre la deformación unitaria de la armadura y el porcentaje de redistribución de momentos, para distintos valores de límite elástico. Se puede observar que el límite de redistribución permitido, tal como se había mencionado, es de un 20%.

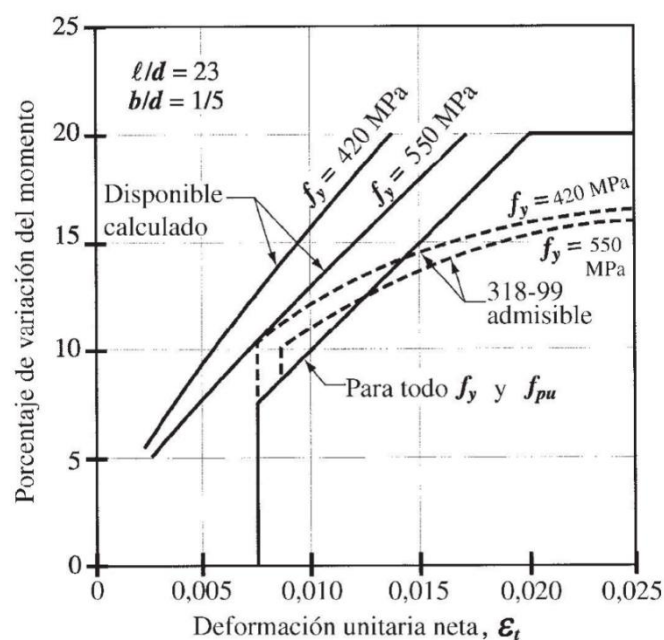


Figura 10. Redistribución permitida de momentos en función de la deformación unitaria neta. [3]

- **Eurocódigo 2 (EC2, EN 1992-1-1 2004) y Código Modelo (CM 2010), CEB-FIB (2010)**

El Eurocódigo 2 y la versión 2010 del Código Modelo plantean el mismo procedimiento y criterios para el análisis con redistribución limitada. Se limita la redistribución de momentos a vigas o losas continuas que se encuentren sometidas a flexión predominantemente, y que tengan una relación de longitudes entre los vanos adyacentes entre 0.5 a 2.0 [8]. La redistribución de momentos se puede llevar a cabo sin necesidad de verificar la capacidad de rotación si se cumple:

$$\begin{aligned} \delta &\geq k_1 + k_2 \frac{x_u}{d} \quad \text{Para } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \\ \delta &\geq k_3 + k_4 \frac{x_u}{d} \quad \text{Para } f_{ck} > 50 \text{ MPa} \\ \delta &\geq k_5 \text{ Cuando se use armadura Clase B y C.} \\ \delta &\geq k_6 \text{ Cuando se use armadura Clase A.} \end{aligned}$$

Donde,

δ es el factor de redistribución de momento.

x_u es la profundidad del eje neutro en rotura luego de la redistribución.

d es el canto efectivo de la sección.

Los valores de k_1 , k_2 , k_3 , k_4 , k_5 y k_6 pueden presentar variación dependiendo del país en su anejo nacional. Los valores recomendados por el Eurocódigo para estos factores son:

$$\begin{aligned} k_1 &= 0.44 \\ k_2 &= 1.25 * \left(0.6 + \frac{0.0014}{\varepsilon_{cu}} \right) \\ k_3 &= 0.54 \\ k_4 &= 1.25 * \left(0.6 + \frac{0.0014}{\varepsilon_{cu}} \right) \\ k_5 &= 0.7 \\ k_6 &= 0.8 \end{aligned}$$

Para asegurar un comportamiento adecuado de las zonas en las que se espera la formación de una rótula plástica se limita el valor de la profundidad de la fibra neutra. En la figura 11 se muestra, para diferentes tipos de acero, las rotaciones plásticas permisibles según la relación x_u/d .

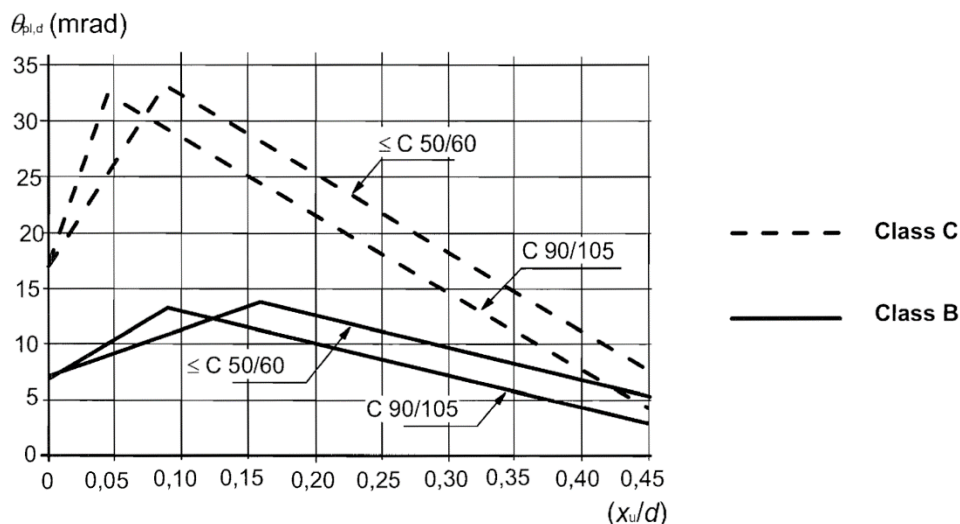


Figura 11. Rotaciones plásticas admisibles en función de la profundidad relativa de la fibra neutra en rotura. [20]

- **Instrucción Española EHE-08**

La EHE-08 expresa que la magnitud de la redistribución depende del grado de ductilidad de las secciones críticas. El grado de ductilidad de estas secciones se relaciona estrechamente con el parámetro x/d .

También establece que de manera simplificada se puede emplear la siguiente expresión para calcular el porcentaje de redistribución de momento en casos de vigas, placas unidireccionales continuas y dinteles de estructuras intraslacionales.

$$r = 56 - 125 \frac{x}{d} \quad (13)$$

Siendo r el máximo porcentaje de redistribución del momento de la sección crítica cuyo valor no debe superar el 30% cuando se utilizan armaduras de acero tipo SD de alta ductilidad y 20% para aceros tipo S de ductilidad normal.

2.2.6. Diseño no lineal de estructuras hiperestáticas

El método, desarrollado por Bairán y Mari[9], permite el dimensionamiento de las armaduras considerando un régimen no lineal, sin necesidad de realizar un análisis no lineal explícito. Es aplicable a pórticos irregulares de hormigón armado pudiendo elegir un grado de redistribución deseado.

Está basado en la realización de dos análisis lineales de la estructura completa que se superponen para obtener la distribución final de esfuerzos y deformaciones. En el primer análisis se calculan los esfuerzos de la estructura original sometida a las solicitaciones de cálculo, mientras que en el segundo se posicionan rótulas internas en los puntos de la estructura donde se desea que se formen las rótulas plásticas.[9] Esta superposición se presenta en la siguiente figura 12.

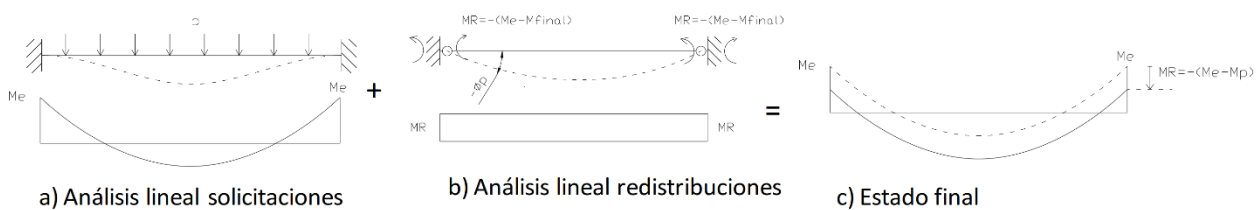


Figura 12. Superposición de los dos análisis lineales de la estructura para estimar el estado final en régimen no lineal.

En general, los pasos del método se resumen en los siguientes:

1. Análisis lineal elástico: que consiste en el procedimiento tradicional de análisis estructural.
2. Decidir una estrategia de redistribución de esfuerzos: distribución de rótulas plásticas y valor del momento en las rótulas plásticas en estado último. Se tiene completa libertad para elegir el comportamiento no lineal que se desea obtener.

3. Análisis estructural de la redistribución de esfuerzos: Se determinan las rotaciones y los esfuerzos de cálculo en la estructura sin necesidad de conocer las armaduras previamente. La estrategia de análisis consiste en la utilización de macroelementos que permiten alojar una o dos rótulas plásticas internas con 3 ó 6 grados de libertad internos adicionales. La matriz de rigidez del elemento se ve modificada.
4. Dimensionamiento de las armaduras: Se dimensionan los refuerzos de las secciones para satisfacer las condiciones de resistencia y ductilidad de cada sección. La curvatura última mínima para la cual deben diseñarse las secciones transversales se determina con la siguiente expresión:

$$\phi_u = \phi_y + 2 \frac{\theta_p}{L_p} \quad (14)$$

Si se desprecia el efecto del confinamiento en el hormigón, no es necesario tomar en cuenta la diferencia entre la deformación última del hormigón y su deformación de plastificación, donde empieza a comportarse no linealmente. En este caso la deformación última del acero puede calcularse como:

$$\varepsilon_{su} = \frac{2\theta_p d}{L_p} + \varepsilon_{sy} \quad (15)$$

De lo contrario, debería tomarse en cuenta las deformaciones del hormigón en su plastificación y en rotura:

$$\varepsilon_{su} = \frac{2\theta_p d}{L_p} + \varepsilon_{sy} + \varepsilon_{cy} - \varepsilon_{cu} \quad (16)$$

Con la deformación última del acero se obtiene la profundidad del eje neutro límite para cumplir con el requisito de ductilidad planteado:

$$\xi = \frac{x_{lim}}{d} = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_c + \varepsilon_{su}} \quad (17)$$

$$M_{lim} = \eta \lambda \xi_{lim} f_{cd} b d^2 \left(1 - \frac{\lambda \xi_{lim}}{2} \right) \quad (18)$$

2.2.7. Cálculo de rotaciones requeridas en rótulas plásticas

Ya que para la redistribución de esfuerzos se deben producir rotaciones importantes en las secciones críticas, y que, en el hormigón armado, la capacidad de rotación de estas secciones es limitada, es interesante conocer cuanta rotación se debe producir en las rótulas plásticas para lograr desarrollar la redistribución deseada.

Por esta razón se ha considerado como pertinente presentar un método desarrollado principalmente por Baker, y que se explica por Park y Paulay[6] en su libro de estructuras de hormigón armado.

La carga última de una estructura hiperestática se alcanza cuando está cerca de formarse la última articulación plástica. Para determinar el valor de esta carga se hacen dos suposiciones:

- Las relaciones momento-curvatura son bilineales, y tienen una porción superior horizontal.
- La rigidez a flexión elástica EI es constante en todo el claro, por lo que será necesario trabajar con una rigidez equivalente que tome en cuenta los diferentes grados de fisuración que sufra el miembro en su longitud.

Considerando como ejemplo la viga continua de tres vanos de la figura 13, la cual es estáticamente indeterminada en segundo grado. Las articulaciones plásticas se formarán primero en los apoyos intermedios 1 y 2.

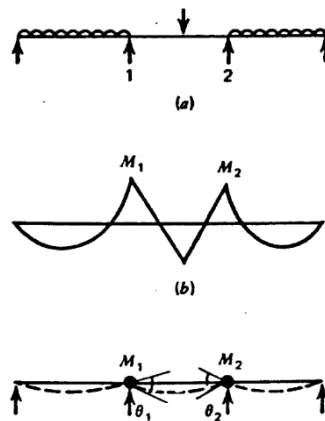


Figura 13. Viga continua ejemplo de tres vanos con rótulas plásticas en los apoyos centrales.

En los puntos de momento máximo M_1 y M_2 , donde se prevé la formación de las rótulas plásticas, se colocan articulaciones sin fricción. Se simulan los momentos máximos en las articulaciones aplicando pares externos M_1 y M_2 por separado en los puntos 1 y 2 respectivamente. Los diagramas de momento resultante se pueden apreciar en la figura 14.

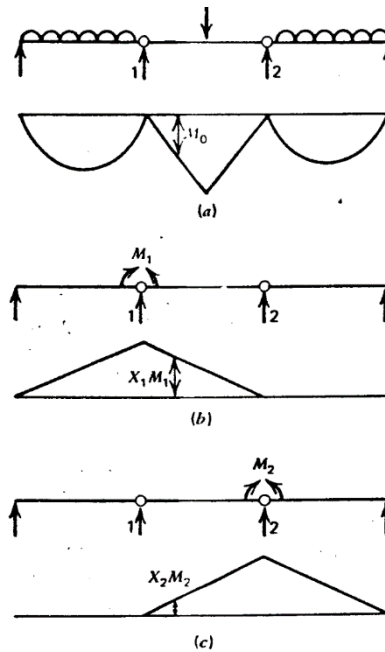


Figura 14. Momentos flectores resultantes.

El valor del momento flector en cualquier punto de la viga sometida a la carga última es:

$$M = M_0 + X_1 M_1 + X_2 M_2 \quad (19)$$

Siendo M_0 el momento flector en cualquier punto cuando los miembros están libres de restricción rotacional en los apoyos. X_1 es el momento flector en cualquier punto cuando $M_1=1$, y X_2 , de igual manera para cuando $M_2=1$.

Así, la energía de deformación elástica almacenada en la viga es:

$$U = \int \frac{M^2}{2EI} dx = \int (M_0 + X_1 M_1 + X_2 M_2)^2 \frac{dx}{2EI} \quad (20)$$

Utilizando el teorema de Castigliano para encontrar las rotaciones en las articulaciones 1 y 2. Estas rotaciones elásticas calculadas en las articulaciones sin fricción, serán las rotaciones requeridas de las articulaciones plásticas de la estructura real.

$$-\theta_1 = \frac{\partial U}{\partial M_1} = \int \frac{X_1}{EI} (M_0 + X_1 M_1 + X_2 M_2) dx = \int \frac{X_1 M_0}{EI} dx + M_1 \int \frac{X_1^2}{EI} dx + M_2 \int \frac{X_1 X_2}{EI} dx \quad (21)$$

De igual manera, en la articulación 2 se tendrá:

$$-\theta_2 = \frac{\partial U}{\partial M_2} = \int \frac{X_2 M_0}{EI} dx + M_1 \int \frac{X_1 X_2}{EI} dx + M_2 \int \frac{X_2^2}{EI} dx \quad (22)$$

Las ecuaciones (22) y (23) se pueden escribir pues de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} -\theta_1 &= \delta_{10} + M_1 \delta_{11} + M_2 \delta_{12} \\ -\theta_2 &= \delta_{20} + M_1 \delta_{21} + M_2 \delta_{22} \end{aligned} \quad (23)$$

Por lo que, de manera general, se pueden plantear estas ecuaciones de forma:

$$-\theta_i = \delta_{i0} + \sum M_k \delta_{ik} \quad (24)$$

Donde,

$$\delta_{io} = \int \frac{X_i M_o}{EI} dx \quad y \quad \delta_{ik} = \int \frac{X_i X_k}{EI} dx \quad (25)$$

En la mayoría de los casos, X_i o X_k , varía linealmente a lo largo del miembro. Suponiendo que X_i tiene una variación general a lo largo del miembro y que el momento X_k tenga una variación lineal, como se muestra en la figura 15.

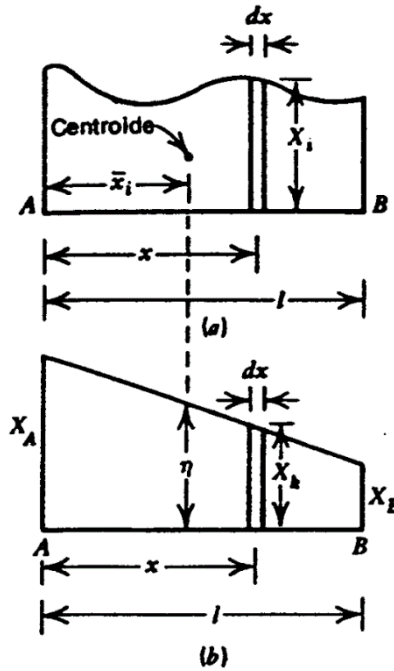


Figura 15. Variaciones de momento flector de X_i y X_k .

Se tiene que,

$$X_k = \frac{x}{l} X_B + \frac{l-x}{l} X_A \quad (26)$$

$$\delta_{ik} = \int_0^l \frac{X_i X_k}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^l X_i \frac{x}{l} X_B dx + \frac{1}{EI} \int_0^l X_i \frac{l-x}{l} X_A dx \quad (27)$$

Pero $\int_0^l X_i x dx$ es el primer momento de área del diagrama X_i alrededor de $A=A_i \bar{x}_i$, y $\int_0^l X_i (l-x) dx$ es el primer momento de área del diagrama de X_i alrededor de $B=A_i(l-\bar{x}_i)$.

$$\begin{aligned} \therefore \delta_{ik} &= \int_0^l \frac{X_i X_k}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left\{ \frac{X_B}{l} A_i \bar{x}_i + \frac{X_A}{l} A_i (l - \bar{x}_i) \right\} = \frac{A_i}{EI} \left(X_B \frac{\bar{x}_i}{l} + X_A \frac{l - \bar{x}_i}{l} \right) \\ &= \frac{A_i}{EI} \eta \end{aligned} \quad (28)$$

Donde A_i es el área del diagrama de momentos con variación general, η es la ordenada del diagrama de momentos con variación lineal en el mismo punto x donde se encuentra el centroide del diagrama de momentos con variación lineal.

La rotación plástica requerida para lograr un nivel de redistribución deseado debe compararse siempre con la capacidad de rotación plástica de la sección en cuestión. Suficiente ductilidad estructural, cuantificada por la capacidad de rotación, es esencial para la redistribución de momentos.[5]

2.3. Dimensionamiento y comprobación de armaduras en Estado Límite Ultimo

2.3.1. Tratamiento en el Eurocódigo EC2 y Normativa Española EHE-08

Tanto en el Eurocódigo como en la EHE-08 se definen en primer lugar una serie de hipótesis generales que se deben asumir para el estudio de los elementos de hormigón armado en estado límite último. Estas son:

- Las secciones planas permanecen planas.
- Las deformaciones de las armaduras, tanto en tensión como en compresión, será igual que la del hormigón que las rodea.
- Se ignora la resistencia a tracción de hormigón.
- Las tensiones en los materiales, tanto en el hormigón como el acero, responderán a las relaciones de tensión-deformación de diseño definidas en la normativa.

Dependiendo de las deformaciones límites de las secciones, se han definido varios dominios de deformación. Generalmente, estos dominios se representan en un diagrama de pivotes donde se pueden identificar los diferentes límites entre un dominio y otro. En la figura 16 se muestra el esquema de pivotes antes mencionado:

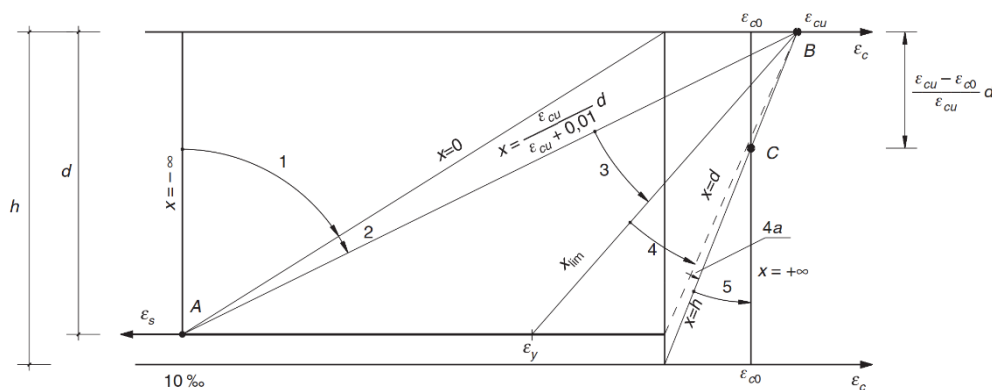


Figura 16. Dominios de deformación de una sección.

En esta gráfica el límite entre el dominio 3 y el dominio 4, es el límite que caracteriza una rotura dúctil de una rotura frágil. Es por esta razón que, para el dimensionamiento de las armaduras de elementos en flexión, este límite marca el criterio para definir la necesidad de requerir armaduras de compresión con la finalidad de proveer la ductilidad requerida para evitar una falla frágil. El valor límite de la profundidad de la fibra neutra, se obtiene con las relaciones de deformaciones sobre la sección cuando ocurre el aplastamiento del hormigón y la plastificación del acero simultáneamente.

$$\frac{\varepsilon_{cu}}{x_{lim}} = \frac{\varepsilon_y}{d - x_{lim}} \quad \frac{0.0035}{x_{lim}} = \frac{0.0021}{d - x_{lim}}$$

$$x_{lim} = 0.625d \quad (29)$$

Para el análisis seccional, las tensiones de compresión en el hormigón se simplifican a un bloque rectangular de compresiones de altura equivalente $\lambda \cdot x$ y de intensidad $\eta \cdot f_{cd}$. Los valores de λ y η dependen de la profundidad del eje neutro x y de la resistencia del hormigón, tal como se muestra en las tablas 3 y 4.

Parámetro $\eta(x)$	
$\eta(x) = \eta$	$0 < x \leq h$
$\eta(x) = 1 - (1 - \eta) \frac{h}{x}$	$h \leq x < \infty$
Parámetro $\lambda(x)$	
$\lambda(x) = \lambda \frac{x}{h}$	$0 < x \leq h$
$\lambda(x) = 1 - (1 - \lambda) \frac{h}{x}$	$h \leq x < \infty$

Tabla 2. Variación de los parámetros η y λ en función de la profundidad de la fibra neutra.

Parámetro η	
$\eta = 1.0$	$f_{ck} \leq 50 \text{ N/mm}^2$
$\eta = 1.0 - \frac{(f_{ck} - 50)}{200}$	$f_{ck} > 50 \text{ N/mm}^2$
Parámetro λ	
$\lambda = 0.8$	$f_{ck} \leq 50 \text{ N/mm}^2$
$\lambda = 0.8 - \frac{(f_{ck} - 50)}{400}$	$f_{ck} > 50 \text{ N/mm}^2$

 Tabla 3. Variación de los parámetros η y λ según la resistencia del hormigón.

Sobre la sección con el bloque rectangular de compresiones se plantea el equilibrio de fuerzas sobre la sección, tal como se muestra en la figura siguiente:

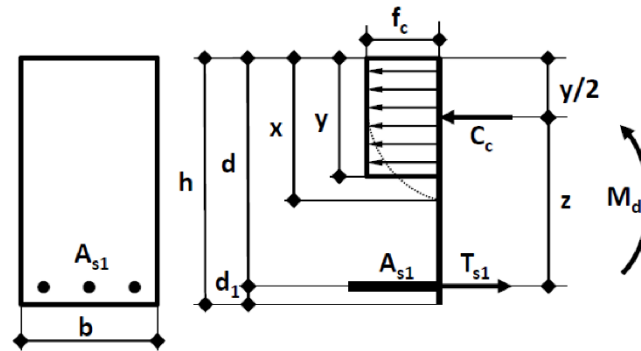


Figura 17. Análisis seccional simplificado con el bloque rectangular de compresiones.

El momento límite correspondiente al valor de x_{lim} será entonces:

$$M_{lim} = C \left(d - \frac{y_{lim}}{2} \right) = f_{cd} * b * y_{lim} \left(d - \frac{y_{lim}}{2} \right) = f_{cd} * b * 0.8 * x_{lim} \left(d - \frac{0.8x_{lim}}{2} \right)$$

$$M_{lim} = 0.375 f_{cd} * b * d^2 = 0.375 * U_o * d \quad (30)$$

Siendo $U_o = f_{cd} * b * d$.

Para una sección con propiedades geométricas definidas, un valor de sollicitación a momento flector M_d mayor que el M_{lim} , implica la colocación necesaria de armadura de compresión para cumplir con los requisitos de ductilidad. Si la sollicitación es menor que el M_{lim} , solo será necesaria armadura de tracción para resistir el momento flector sin problemas de rotura frágil.

Según este criterio, en el Anejo 7 de la norma española EHE-08[10], se presentan las siguientes expresiones para el dimensionamiento y comprobación de secciones rectangulares sometidas a flexión simple.

1. Si $M_d \leq M_{lim}$

$$U_{s2} = 0 \quad ; \quad U_{s1} = U_o \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2M_d}{U_o d}} \right) \quad (31)$$

2. Si $M_d > M_{lim}$

$$U_{s2} = \frac{M_d - M_{lim}}{d - d'} \quad ; \quad U_{s1} = 0.5U_o + U_{s2} \quad (32)$$

Donde $U_{s1} = A_{s1} * f_{yd}$ y $U_{s2} = A_{s2} * f_{yd}$.

Para la comprobación de las secciones se plantean tres casos distintos:

1. $U_{s1} - U_{s2} < U_v$: la fibra neutra está comprendida entre $0 < x < 2.5d'$.

$$M_u = 0.24U_v d' \frac{(U_v - U_{s1} + U_{s2})(1.5U_{s1} + U_{s2})}{(0.6U_v + U_{s2})^2} + U_{s1}(d - d') \quad (33)$$

2. $U_v \leq U_{s1} - U_{s2} \leq 0.5U_o$: la fibra neutra está comprendida entre $2.5d' \leq x \leq 0.625d$.

$$M_u = (U_{s1} - U_{s2}) \left(1 - \frac{U_{s1} - U_{s2}}{2U_o} \right) d + U_{s2}(d - d') \quad (34)$$

3. $0.5U_o < U_{s1} - U_{s2}$: la fibra neutra está comprendida entre $0.625d < x < d$.

$$M_u = \frac{4}{3}U_{s1} \left(\frac{\alpha + 1.2}{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 1.92 \frac{U_{s1}}{U_o}}} - 0.5 \right) d + U_{s2}(d - d') \quad ; \quad \alpha = \frac{U_{s1} + 0.6U_{s2}}{U_o} \quad (35)$$

2.3.2. Tratamiento del ACI-318

En el Reglamento ACI-318 se establecen explícitamente una serie de hipótesis que deben cumplirse para el cálculo de la resistencia a flexión de vigas de hormigón armado. Entre estas hipótesis se encuentran:

- Debe cumplirse con la condición de equilibrio en cada sección.
- Las deformaciones unitarias en el concreto y el refuerzo deben suponerse directamente proporcionales a la distancia al eje neutro.
- La deformación máxima unitaria utilizable en la fibra extrema sometida a compresión del concreto debe suponerse igual a 0.003.
- Se desprecia la resistencia a tracción del hormigón.

Al igual que las demás normativas antes discutidas, para simplificar en análisis de la sección se cambia la distribución parabólica de tensiones en el hormigón a un bloque rectangular equivalente. Este bloque rectangular se supone con una intensidad $0.85f'_c$ y una profundidad $a = \beta_1 c$. El área del bloque rectangular es igual al área del bloque parabólico, y sus centroides deben de coincidir, tal como se muestra abajo en la figura:

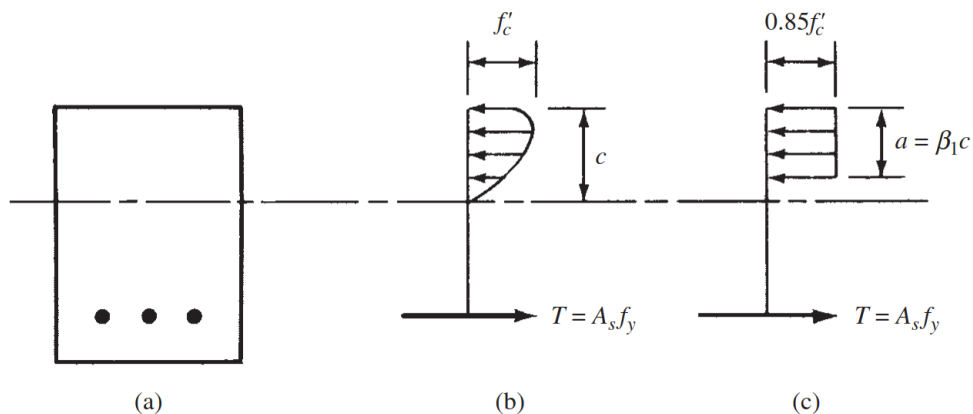


Figura 18. Bloque rectangular equivalente de tensiones en el hormigón, adoptado por el ACI-318.

El valor de β_1 es igual a 0.85 para hormigones de resistencia a la compresión menor o igual a 30MPa. Para hormigones con resistencia mayor a 30MPa se reduce el valor de β_1 en 0.05 por cada 7MPa de incremento en la resistencia, hasta alcanzar un mínimo de 0.65. También se puede determinar con la siguiente expresión:

$$\beta_1 = 0.85 - 0.008 * (f'_c - 30MPa) \geq 0.65 \quad (36)$$

Las expresiones para el cálculo de la resistencia de la sección se derivan a partir de plantear equilibrio de fuerzas horizontales en la sección, es decir $C=T$, y de ahí obteniendo a.

$$0.85 * f'c * a * b = A_s * f_y$$

$$a = \frac{A_s * f_y}{0.85 f'c * b} = \frac{\rho * f_y * d}{0.85 f'c} \quad (37)$$

La cuantía de refuerzo ρ se limita a un valor de manera que el acero tenga una deformación considerable al momento en el que el hormigón alcanza su deformación última. Por esto, la resistencia nominal puede plantearse como:

$$\phi M_n = \phi T \left(d - \frac{a}{2} \right) = \phi A_s f_y \left(d - \frac{a}{2} \right) \quad (38)$$

Siendo Φ el coeficiente de reducción de resistencia nominal, igual a 0.9 en el caso de elementos controlados por tensión.

Para el dimensionamiento del refuerzo, se sustituye la expresión de a en la ecuación (38) en la ecuación (39) anterior, y también A_s por $\rho * b * d$.

$$\phi M_n = M_u = \phi b d^2 f_y \rho \left(1 - \frac{\rho f_y}{1.7 f'c} \right) \quad (39)$$

Despejando la cuantía de armadura ρ y haciendo $R_n = M_u / \Phi b d^2$, se obtiene la siguiente expresión directa para el cálculo de la cuantía de armadura.

$$\rho = \frac{0.85 * f'c}{f_y} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2 R_n}{0.85 f'c}} \right) \quad (40)$$

El ACI plantea que para lograr una ductilidad adecuada de las secciones se deben producir deformaciones en el acero igual o superiores a $\epsilon_t = 0.005$ al momento en el que el hormigón alcanza su deformación última de $\epsilon_{cu} = 0.003$. Según el código, de esta manera el acero tiene holgura suficiente para fluir, permitiendo grandes deflexiones advirtiéndolo a los usuarios para que puedan intervenir a tiempo.

Para cumplir con este requisito se define una cuantía máxima de refuerzo, que estará en función de la deformación última del hormigón, de la deformación de plastificación del acero, del valor de $\varepsilon_t=0.005$, y de la cuantía balanceada correspondiente al grado del acero.

$$\rho_{max} = \frac{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_y}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_t} * \rho_b = \frac{0.003 + 0.0021}{0.003 + 0.005} * \rho_b = 0.64 * \rho_b \quad (41)$$

Esta cuantía máxima corresponde a aceros grado 60, con un límite elástico de 4,200Kg/cm². (411.9MPa)

ρ_b es la cuantía balanceada, es decir, la cuantía en la que se produce el fallo simultaneo del hormigón y el acero de refuerzo en una sección.

$$\rho_b = \frac{0.85\beta_1 f'_c}{f_y} * \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_y + \varepsilon_{cu}} \quad (42)$$

Las secciones cuya sollicitación requiera de un refuerzo mayor de la cuantía balanceada, requerirán de armadura a compresión para cumplir con los requisitos de ductilidad y retrasar el aplastamiento del hormigón, o bien, modificar las demás propiedades geométricas de la sección.

2.4. Comprobación de los estados límite de fisuración y deformaciones

2.4.1. Tratamiento en el Eurocódigo EC2 para ELS

El ancho de fisura debe limitarse de manera que no intervenga con el correcto funcionamiento de la estructura, así como con su durabilidad. Para el control de anchos de fisura el Eurocódigo EC2 plantea que los anchos de fisura característicos calculados w_k deben ser menor que un valor máximo w_{max} , que es función de la clase de exposición ambiental de la estructura y del tipo de refuerzo.

Dichos valores máximos de referencia se presentan en la siguiente tabla extraída directamente de la norma:

Clase de Exposición	Miembros de hormigón armado o pretensados con tendones no adherentes	Miembros pretensados con tendones adherentes
	Combinación Cuasipermanente	Combinación Frecuente
X0, XC1	0.4	0.2
XC2, XC3, XC4	0.3	0.2
XD1, XD2, XD3, XS1, XS2, XS3		Descompresión

Tabla 4. Valores máximos de anchos de fisuras recomendados por el Eurocódigo EC2.

Para el cálculo del ancho de fisura característico w_k se plantea la expresión:

$$w_k = S_{r,max}(\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm}) \quad (43)$$

Donde,

$S_{r,max}$, es la separación máxima entre fisuras.

ε_{sm} , es la deformación media del refuerzo bajo la combinación de acciones más desfavorable, incluyendo los efectos de las deformaciones impuestas, y también la aportación a tracción del hormigón entre fisuras.

ε_{cm} , es la deformación media del hormigón entre una fisura y otra.

El término $(\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm})$ se calcula a través de la expresión siguiente,

$$\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} = \frac{\sigma_s - k_t \frac{f_{ct,eff}}{\rho_{p,eff}} (1 + \alpha_e \rho_{p,eff})}{E_s} \geq 0.6 \frac{\sigma_s}{E_s} \quad (44)$$

Donde:

σ_s , es la tensión en la armadura de refuerzo asumiendo la sección fisurada.

α_e , es la relación E_s/E_{cm} .

$$\rho_{p,eff} = \frac{A_s + \xi_1 A'_p}{A_{c,eff}}$$

A'_p y $A_{c,eff}$ se definen como el área de armadura de refuerzo activo y el área de hormigón a tensión efectiva alrededor de las armaduras. $h_{c,eff}$ se considera como el menor de $2.5(h - d)$, $\frac{h-x}{3}$ o $\frac{h}{2}$.

ξ_1 , se calcula con la expresión $\sqrt{\xi \frac{\phi_s}{\phi_p}}$, donde ξ es la relación de adherencia entre la armadura activa y pasiva, proveniente de la tabla 6.2 en el Eurocódigo EC2. ϕ_s es el diámetro mayor de la armadura pasiva. ϕ_p es el diámetro equivalente del tendón de pretensado.

k_t , es un factor dependiente de la duración de la carga. (0.6 para las cargas a corto plazo y 0.4 para las cargas a largo plazo).

Por otro lado, la separación máxima entre fisuras se calcula con la siguiente expresión:

$$S_{r,max} = k_3 c + k_1 k_2 k_4 \phi / \rho_{p,eff} \quad (45)$$

ϕ , es el diámetro de barra de refuerzo. En caso de que sean diferentes diámetros de barras se debe calcular un diámetro equivalente con la siguiente expresión:

$$\phi_{eq} = \frac{n_1 \phi_1^2 + n_2 \phi_2^2}{n_1 \phi_1 + n_2 \phi_2} \quad (46)$$

c , es el recubrimiento del refuerzo longitudinal.

K_1 , es un coeficiente que toma en cuenta las propiedades de adherencia del refuerzo adherido. (0.8 para barras de alta adherencia y 1.6 para barras con superficie plana)

K_2 , es un coeficiente que toma en cuenta la distribución de deformaciones. (0.5 para flexión y 1.0 para tensión pura)

K_3 y K_4 pueden encontrarse en el anejo nacional de cada país. Los valores recomendados son 3.4 y 0.425 respectivamente.

Cuando el espaciamiento del refuerzo excede $5(c + \phi/2)$, o cuando no hay refuerzo adherente en la zona de tensión, un límite superior para el ancho de fisura se puede calcular asumiendo un espaciamiento máximo de fisura igual a: $S_{r,max} = 1.3(h - x)$.

Para llevar a cabo el control de flechas el Eurocódigo establece que cuando no se espera que la resistencia a tracción del hormigón no vaya a ser sobrepasada en ninguna zona, los elementos deben considerarse como no fisurados. En cambio, los elementos que se esperan que puedan fisurarse, deberán considerarse en un estado intermedio, ya que lo posible es que no se fisuren por completo. Para predecir el comportamiento de manera adecuada se sugiere la siguiente expresión:

$$\alpha = \zeta \alpha_{II} + (1 - \zeta) \alpha_I \quad (47)$$

Donde,

α , es el parámetro de deformación considerado, que puede ser una deformación, una curvatura o una rotación, por ejemplo. Generalmente se considera como una deflexión.

α_I y α_{II} , son los valores del parámetro calculado para el caso no fisurado y completamente fisurado.

ζ , es el coeficiente de distribución tomando en cuenta el efecto de la aportación del hormigón entre fisuras en tracción. $\zeta = 1 - \beta \left(\frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s} \right)^2$. $\zeta = 0$ para secciones no fisuradas.

β , es el coeficiente que toma en cuenta la influencia de la duración de la carga o el efecto de una carga cíclica. (1.0 para una carga única a corto plazo y 0.5 para cargas sostenidas o varios ciclos repetitivos de cargas).

σ_s , es la tensión en el refuerzo a tracción calculado en base a la sección fisurada.

σ_{sr} , es la tensión en el refuerzo a tracción calculado en base a una sección fisurada bajo las condiciones de carga causantes de la primera fisuración.

El término σ_{sr}/σ_s puede ser reemplazado por M_{cr}/M en flexión o N_{cr}/N para tensión pura.

2.4.2. Tratamiento del ACI-318 para el ELS

Debido a la compleja naturaleza del problema que representa predecir el proceso de formación de fisuras en el hormigón, se han desarrollado métodos y expresiones para calcular los anchos probables de fisura basados en observaciones experimentales. La mayoría de las ecuaciones que han sido desarrolladas predicen un valor de ancho de fisura para el cual el 90% de las fisuras que se formen tendrán un ancho menor al calculado. Sin embargo, algunas fisuras aisladas que excedan dos veces el valor calculado pueden ocurrir.[4]

Las siguientes dos ecuaciones han sido importantes en el desarrollo de las previsiones del ACI para el control de fisuras:

- Gergely y Lutz:

$$w = 0.076 \beta f_s \sqrt[3]{d_c A} \quad (48)$$

- Frosch:

$$w = 2000 \frac{f_s}{E_s} \beta \sqrt{d_c^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2} \quad (49)$$

Donde,

w , es el máximo ancho de fisura en milésimas de pulgadas.

β , es la relación entre la distancia desde la fibra neutra hasta la fibra extrema a tensión del hormigón y la distancia desde la fibra neutra al centroide de la armadura traccionada.

f_s , es la tensión en la armadura, en kips/pulg². Se permite utilizar 0.6fy para estructuras normales.

d_c , es la distancia desde la fibra de hormigón mas traccionada y el centro de la barra de refuerzo más cercana.

A , es el área efectiva a tensión del hormigón alrededor del refuerzo principal de acero (teniendo el mismo centroide que el refuerzo) y dividiéndose por el número de barras.

S , es el máximo espaciamiento entre barras.

Debido a la naturaleza aleatoria de la fisuración y la alta dispersión de las mediciones de anchos de fisura, incluso bajo condiciones de laboratorio, el ACI busca controlar el ancho de fisura estableciendo un espaciamiento máximo s entre las barras de refuerzo más cercanas a la superficie traccionada. Este espaciamiento estará en función de la tensión presente en la armadura bajo condiciones de servicio f_s en psi.

$$s = (15) \left(\frac{40,000}{f_s} \right) - 2.5c_c \leq (12) \left(\frac{40,000}{f_s} \right) \quad (50)$$

C_c es el recubrimiento medido hasta la cara de la barra de refuerzo, propuesto así para que el espaciamiento fuera independiente del diámetro de la barra.

En cuanto al control de deflexiones, el ACI plantea en una tabla los valores máximos admisibles para las deflexiones de distintos miembros estructurales. Dicha tabla se presenta a continuación:

Miembro	Condición		Deflexión Considerada	Límite de deflexión
Cubiertas planas	Que no soporten ni estén ligados a elementos no estructurales susceptibles de sufrir daños debido a deflexiones grandes		Deflexión debido a L_r , S y R	$L/180$
Entrepisos			Deflexión inmediata debida a L	$L/360$
Cubiertas o entrepisos	Soportan o están ligados a elementos no estructurales	Susceptibles de sufrir daños debido a deflexiones grandes	La parte de la deflexión total que ocurre después de la unión de los elementos no estructurales (la suma de la deflexión a largo plazo debida a todas las cargas permanentes, y la deflexión inmediata debida a cualquier carga viva adicional)	$L/480$
		No susceptibles de sufrir daños debido a deflexiones grandes		$L/240$

Tabla 5. Deflexiones máximas admisibles establecidas por el ACI-318-14.

Para el cálculo de las deflexiones el ACI permite utilizar las expresiones clásicas de resistencia de materiales según las condiciones de apoyo de la estructura, pero se debe calcular una inercia efectiva para tomar en cuenta el hecho de que, bajo cargas de servicio, la estructura no se encontraría completamente fisurada. Dicha inercia efectiva se calcula con la siguiente expresión:

$$I_{eff} = \left(\frac{M_{cr}}{M_a}\right)^3 * I_g + \left[1 - \left(\frac{M_{cr}}{M_a}\right)^3\right] * I_{cr} \quad (51)$$

Donde,

I_g , es el momento de inercia de la sección bruta.

I_{cr} , es el momento de inercia de la sección fisurada.

M_{cr} , es el momento flector de fisuración de la sección.

M_a , es el momento flector máximo bajo cargas de servicio.

2.4.3. Tratamiento de la normativa española EHE-08 para verificación del ELS.

En la normativa española se plantea un método general para calcular el ancho de fisura característico w_k , el cual debe ser menor que un valor máximo establecido en la misma norma en la siguiente tabla a continuación.

Clase de exposición	W_{\max} (mm)	
	Hormigón armado (Para la combinación cuasipermanente de acciones)	Hormigón pretensado (para la combinación frecuente de acciones)
I	0.4	0.2
IIa, IIb, H	0.3	0.2
IIIa, IIIb, IV, F, Qa	0.2	Descompresión
IIIc, Qb, Qc	0.1	

Tabla 6. Valores máximos admisibles de anchos de fisura establecidos en la EHE-08.

La expresión para calcular el ancho de fisura característico es la siguiente:

$$w_k = \beta s_m \varepsilon_{sm} \quad (52)$$

En la anterior expresión β es un coeficiente que relaciona la abertura media de fisura con el valor característico y vale 1.3 en el caso de acciones indirectas solamente, y 1.7 para el resto de los casos.

La separación media entre fisuras S_m se calcula en base al recubrimiento de la armadura C , la distancia S entre las barras longitudinales, el diámetro de la barra traccionada más gruesa, el área de armadura a tracción A_s , y un factor k_1 que representa la influencia del diagrama de tracciones en la sección.

$$S_m = 2c + 0.2s + 0.4k_1 \frac{\phi A_{c,eficaz}}{A_s} \quad (53)$$

La separación S se tomaría como máximo un valor igual a 15Φ . Además, el factor k_1 se calcula como: $\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{8\varepsilon_1}$. Vale 0.125 en el caso de flexión simple.

El área de hormigón de la zona de recubrimiento $A_{c,eficaz}$ se definen en la siguiente figura:

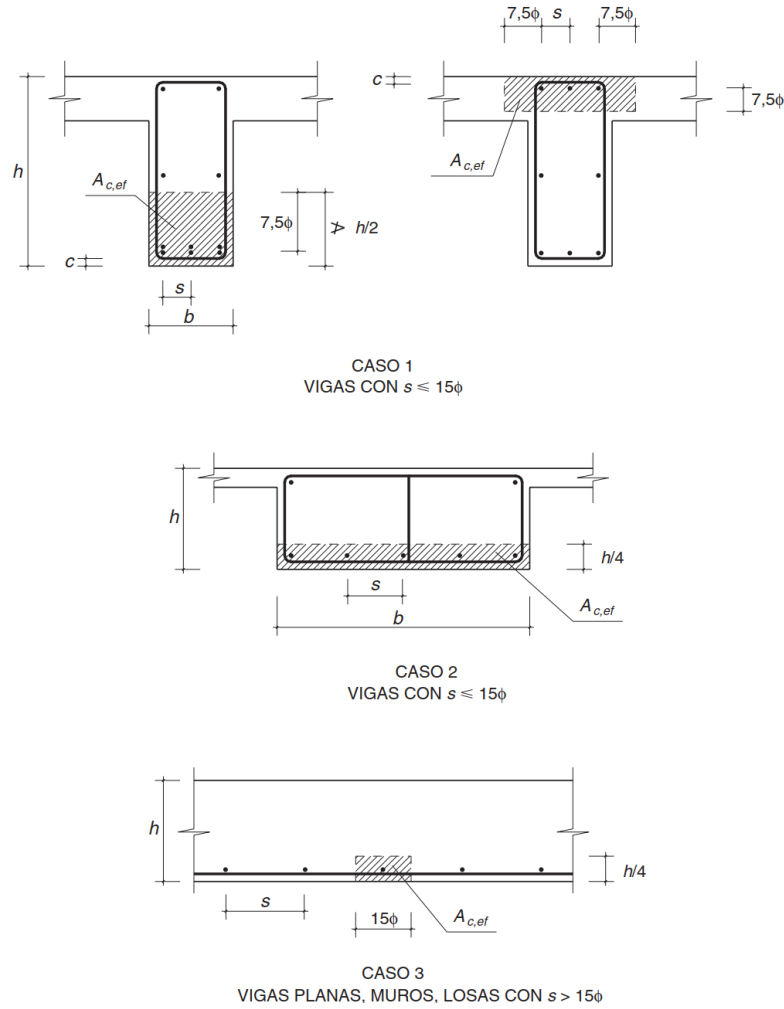


Figura 19. Definición del área eficaz de hormigón a tracción presentadas por la normativa EHE-08.

Por otro lado, el alargamiento medio de las armaduras, teniendo en cuenta la aportación del hormigón traccionado entre fisuras, se calcula de la siguiente manera:

$$\varepsilon_{sm} = \frac{\sigma_s}{E_s} \left[1 - k_2 \left(\frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s} \right)^2 \right] \geq 0.4 \frac{\sigma_s}{E_s} \quad (54)$$

Donde,

k_2 , es un coeficiente con valor igual a 1.0 para los casos de carga instantánea no repetida y 0.5 para los restantes.

σ_{sr} , es la tensión en la armadura en la sección fisurada en el instante en que se produce la fisura.

σ_s , es la tensión de servicio de la armadura pasiva en la hipótesis de sección fisurada.

Para llevar a cabo el control de deformaciones la instrucción española EHE-08 define una serie de relaciones luz/canto útil para los cuales no sería necesario la comprobación de flechas. Dichas relaciones están recogidas en la siguiente tabla a continuación.

Sistema estructural L/d	K	Elementos fuertemente armados $\rho=1.5\%$	Elementos débilmente armados $\rho=0.5\%$
Viga simplemente apoyada. Losa uni o bidireccional simplemente apoyada	1.00	14	20
Viga continua en un extremo. Losa unidireccional continua en un solo lado	1.30	18	26
Viga continua en ambos extremos. Losa unidireccional o bidireccional continua	1.50	20	30
Recuadros exteriores y de esquina en losas sin vigas sobre apoyos aislados	1.15	16	23
Recuadros interiores en losas sin vigas sobre apoyos aislados	1.20	17	24
Voladizos	0.40	6	8

Tabla 7. Relaciones luz/canto útil mínimas establecidas por la normativa española EHE-08 para el control de flechas.

Estos valores anteriores corresponden a miembros estructurales con $f_{ck}=30 \text{ N/mm}^2$, y a través de un estudio paramétrico que tiene en cuenta elementos estructurales con distintas cuantías y calidades de hormigón.[10] Debido a este estudio se desarrollaron las siguientes expresiones para los demás casos no contemplados.

$$\frac{L}{d} = K \left[11 + 1.5\sqrt{f_{ck}} \frac{\rho_0}{\rho} + 3.2\sqrt{f_{ck}} \left(\frac{\rho_0}{\rho} - 1 \right)^{3/2} \right] \text{ si } \rho \leq \rho_0 \quad (55)$$

$$\frac{L}{d} = K \left[11 + 1.5\sqrt{f_{ck}} \frac{\rho_0}{\rho - \rho'} + \frac{1}{12}\sqrt{f_{ck}} \sqrt{\frac{\rho'}{\rho_0}} \right] \text{ si } \rho > \rho_0 \quad (56)$$

Donde,

ρ_0 , es la cuantía geométrica de referencia de valor $\sqrt{f_{ck}} \cdot 10^{-3}$.

ρ , es la cuantía geométrica de tracción en la sección crítica, necesaria para resistir las acciones de cálculo.

ρ' , es la cuantía geométrica de compresión en la sección crítica para resistir las acciones de cálculo.

Estas expresiones anteriores y los valores de la tabla han supuesto una tensión en la armadura bajo cargas de servicio. Para otros niveles de tensión, las expresiones anteriores se multiplican por el siguiente factor:

$$\frac{310}{\sigma_s} = \frac{500}{f_{yk}} \frac{A_{s,real}}{A_{s,necesaria}}$$

Cuando sea necesario comprobar las flechas instantáneas, la normativa recomienda utilizar un valor de inercia equivalente. Dicho valor equivalente de inercia se calcula de la siguiente manera:

$$I_e = \left(\frac{M_f}{M_a}\right)^3 * I_b + \left[1 - \left(\frac{M_f}{M_a}\right)^3\right] I_f \leq I_b \quad (57)$$

Siendo M_f el momento de fisuración y M_a el momento flector aplicado bajo la combinación característica.

2.4.4. Tratamiento del Código Modelo 2010 para el ELS

El Código Modelo 2010, en cuanto al control de la fisuración en servicio, requiere que se cumpla la condición de que el ancho de fisura calculado w_d sea menor que un valor nominal límite de ancho de fisura w_{lim} . Dichos valores límites se exponen en la siguiente tabla.

	RC	PL1	PL2	PL3
X0	0.3	0.2	0.3	0.3
XC	0.3	0.2	0.3	0.3
XD	0.2	$\sigma < 0$	0.2	0.2
XS	0.2	$\sigma < 0$	0.2	0.2
XF	0.2	$\sigma < 0$	0.2	0.2

Tabla 8. Anchos límite de fisura establecidos por el Código Modelo 2010.

El ancho de fisura, según esta normativa, se calcularía con la expresión:

$$w_d = 2l_{s,max}(\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} - \varepsilon_{cs}) \quad (58)$$

Donde,

ε_{sm} , es la deformación promedio del acero sobre la longitud $l_{s,max}$.

ε_{cm} , es la deformación promedio del hormigón sobre la longitud $l_{s,max}$.

ε_{cs} , es la deformación del hormigón debido a la retracción libre.

$l_{s,max}$, representa la longitud sobre la cual se produce el deslizamiento entre el hormigón y la armadura. Se calcula con la expresión:

$$l_{s,max} = k \cdot c + \frac{1}{4} \frac{f_{ctm}}{\tau_{bms}} \frac{\phi_s}{\rho_{s,ef}} \quad (59)$$

Siendo,

k , un parámetro empírico que toma en cuenta la influencia del recubrimiento del hormigón. Se puede tomar $k=1$ como simplificación.

c , es el recubrimiento de hormigón.

τ_{bms} , es el valor medio de adherencia entre el hormigón y la armadura.

La deformación relativa ($\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} - \varepsilon_{cs}$) se calcula como se muestra a continuación:

$$(\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} - \varepsilon_{cs}) = \frac{\sigma_s - \beta \sigma_{sr}}{E_s} + \eta_r \varepsilon_{sh} \quad (60)$$

Donde,

σ_s , es la tensión en el acero en una fisura.

σ_{sr} , es la tensión máxima de la armadura en una fisura durante la etapa de la formación de la fisura. Para tensión pura es $\sigma_{sr} = \frac{f_{ctm}}{\rho_{s,ef}} (1 + \alpha_e \rho_{s,ef})$, siendo $\rho_{s,ef} = \frac{A_s}{A_{c,ef}}$.

$A_{c,ef}$, es el área efectiva del hormigón en tensión, según lo definido en la siguiente figura.

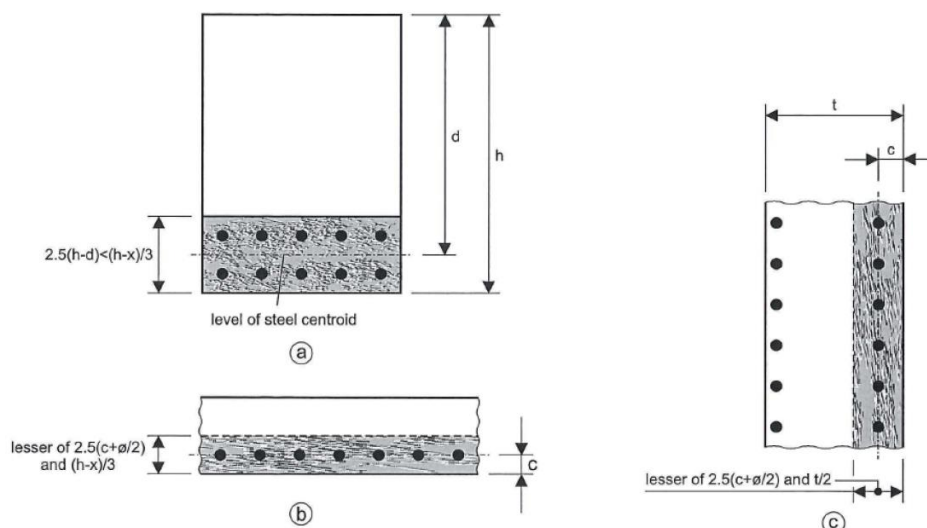


Figura 20. Definición del area efectiva de hormigón a tracción según el Código Modelo 2010.

α_e , es la relación modular $\frac{E_s}{E_c}$.

β , es un coeficiente empírico para ajustar $l_{s,max}$ según el tipo de carga.

η_r , es un coeficiente que considera la contribución de la retracción.

ε_{sh} , es la deformación por retracción.

Los valores de τ_{bms} , β y η_r se recogen en la siguiente tabla para los diversos casos posibles, extraída de la misma normativa.

	Etapas de formación de fisuras	Etapas de fisuración estabilizada
A corto plazo, carga instantanea	$\tau_{bms} = 1.8f_{ctm}(t)$ $\beta = 0.6$ $\eta_r = 0$	$\tau_{bms} = 1.8f_{ctm}(t)$ $\beta = 0.6$ $\eta_r = 0$
A largo plazo, carga repetida	$\tau_{bms} = 1.35f_{ctm}(t)$ $\beta = 0.6$ $\eta_r = 0$	$\tau_{bms} = 1.8f_{ctm}(t)$ $\beta = 0.4$ $\eta_r = 1$

Tabla 9. Valores de los coeficientes τ_{bms} , β y η_r establecidos en el Código Modelo 2010.

Para el cálculo de flechas y el control de las deformaciones, en el Código Modelo se plantea la misma ecuación que en el Eurocódigo EC2, para poder tomar en cuenta el hecho de que el miembro estructural estudiado no se encuentra totalmente fisurado. Dicho método permite predecir una flecha intermedia entre el estado totalmente fisurado y sin fisurar.

$$\alpha = \zeta \alpha_{II} + (1 - \zeta) \alpha_I \quad (61)$$

Los términos y variables que intervienen en esta expresión ya fueron definidos anteriormente.

La norma plantea que para el cálculo de la flecha en estado sin fisurar α_I se utiliza la rigidez del miembro ($E_c I_c$) donde E_c es el módulo elástico para el caso de carga considerada, e I_c es el momento de inercia de la sección bruta. Por otro lado, para el cálculo de la flecha en estado totalmente fisurado α_{II} puede calcularse utilizando la siguiente rigidez para el miembro, ignorando los efectos del "tensión stiffening", y considerando una sección rectangular.

$$(EI)_{II} = d^2 \left(1 - \frac{x}{d}\right) \left(1 - \frac{x}{3d}\right) A_{s1} E_s + d'^2 \left(\frac{x}{d} - 1\right) \left(\frac{x}{3d'} - 1\right) A_{s2} E_s \quad (62)$$

$$\frac{x}{d} = \alpha_e \rho_l \left(1 + \frac{\rho_2}{\rho_1}\right) \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2 \left(1 + \frac{\rho_2 d'}{\rho_1 d}\right)}{n \rho_1 \left(1 + \frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^2}}\right) \quad (63)$$

Alternativamente, se plantea la siguiente simplificación directa de la deflexión:

$$(EI)_{eff} = \frac{(EI)_I \cdot (EI)_{II}}{\zeta \cdot (EI)_I + (1 - \zeta) \cdot (EI)_{II}} \quad (64)$$

2.5. Conclusiones sobre el estado del conocimiento

La redistribución de esfuerzos en estructuras hiperestáticas siempre ha sido un tema de interés en el mundo del hormigón, ya que su comprensión puede permitir una mayor optimización y explotación de la capacidad real de las estructuras. Sin embargo, en los métodos planteados por las normativas para aproximar este comportamiento de las estructuras, así como en métodos directos de diseño no lineal de las armaduras, únicamente se hace énfasis en considerar las cargas actuantes sobre la estructura, y prácticamente ninguno en las acciones geométricas sobre la estructura.

El Eurocódigo se limita a plantear que tanto los efectos térmicos como los asentamientos de apoyo deben considerarse en estado límite de servicio. En estado límite último solo requiere que se tomen en cuenta cuando sean significativos, dejando una brecha de subjetividad abierta sin especificar ningún criterio para determinar si son significativos o no.

La norma ACI-318 establece que las fuerzas debidas a las restricciones por cambios de volumen y asentamientos diferenciales deben considerarse con otras cargas cuando sus efectos afectan la seguridad estructural. Sin embargo, reconoce que rutinariamente en la práctica, estos efectos no se calculan ni se combinan con otros efectos, sino que se acude a técnicas como el uso de conexiones y elementos dúctiles que se acomoden a los movimientos.

A esto se limitan los comentarios de las normativas sobre el efecto de las acciones de tipo geométrico.

Queda, por tanto, abierto como un campo de estudio, cuáles son los efectos reales de las deformaciones impuestas tanto en Estado Límite de Servicio como en Estado Límites Últimos de flexión, por las siguientes razones:

- En ELU las deformaciones impuestas, al tratarse de acciones geométricas, pueden consumir parte de la ductilidad de la estructura y afectar, por tanto, a la carga última.
- En ELS, deben tenerse en cuenta que los efectos de las deformaciones impuestas dependen de la rigidez de la estructura y esta puede verse muy reducida por efectos de la fisuración, con lo cual los esfuerzos obtenidos a través del cálculo elástico pueden no ser adecuados para comprobar el ELS.

Estos dos aspectos serán objeto de estudio en esta tesis de máster.

3. PROPUESTA DE METODOLOGÍA DE CÁLCULO EN ESTADO LÍMITE ÚLTIMO

3.1. Concepto de rotación plástica efectiva

Se hace referencia al término de rotación plástica cuando en una estructura alcanza el momento de plastificación en alguna de sus secciones, y a partir de ese momento, estas secciones sufren grandes rotaciones como consecuencia de la plastificación de la armadura a tracción del elemento. Estas rotaciones se producen a lo largo de una longitud específica del elemento, llamada comúnmente como longitud plástica.

La capacidad de rotación plástica de una sección está muy caracterizada por su diagrama momento-curvatura, ya que entre la curvatura de plastificación Φ_y y la curvatura última Φ_u se supone que la sección no es capaz de seguir resistiendo mayores esfuerzos, pero sí sufre deformaciones y rotaciones considerables en el rango plástico. Esta capacidad se puede calcular integrando la diferencia de curvatura $\Delta\Phi=(\Phi_u-\Phi_y)$ a lo largo de la longitud plástica (L_p), y se asume que su variación es lineal entre ambos extremos de la rótula plástica, es decir:

$$\theta_p = \int_0^{l_p} \Delta\phi_{p(x)} dx = 2 \int_0^{\frac{l_p}{2}} \frac{2(\phi_u - \phi_y)}{l_p} * x dx = \frac{(\phi_u - \phi_y)}{2} * l_p \quad (65)$$

La longitud plástica, en el caso de rótulas que se forman en las zonas de apoyo, se puede determinar intersecando la ley de momentos con el momento plástico efectivo M_y^* , el cual es el momento de plastificación M_y reducido por el efecto del cortante, debido al incremento de la fuerza longitudinal del refuerzo. Para estribos verticales, y ángulo de inclinación de fisuras de 45° , $\Delta T \cong V_d$, por lo que la longitud plástica se calcula:[11]

$$l_p = \frac{M_u - M_y^*}{V_d} = \frac{M_u - (M_y - \Delta T * z)}{V_d} = \frac{M_u - M_y}{V_d} + z \quad (66)$$

El valor de z puede aproximarse a $0.9d$.

Cabe mencionar que resultados experimentales corroboran el hecho de obtener una mejor predicción de la capacidad de rotación plástica cuando se toman en cuenta el efecto del cortante, y el aporte de la tracción del hormigón entre fisuras, también conocido por su terminología en inglés: "tension stiffening".[12]

En el caso de rótulas plásticas que se forman en zonas intermedias de los vanos, es posible calcular la longitud plástica con la expresión:

$$l_p = \sqrt{\frac{8(M_u - M_y)}{p_u}} \quad (67)$$

En las zonas de vano, debido a la forma que tiene del diagrama de momentos flectores, la rotación plástica es ligeramente mayor a la expresada anteriormente. En estos casos, se demuestra la siguiente expresión para ser utilizada con ayuda de la figura 21:

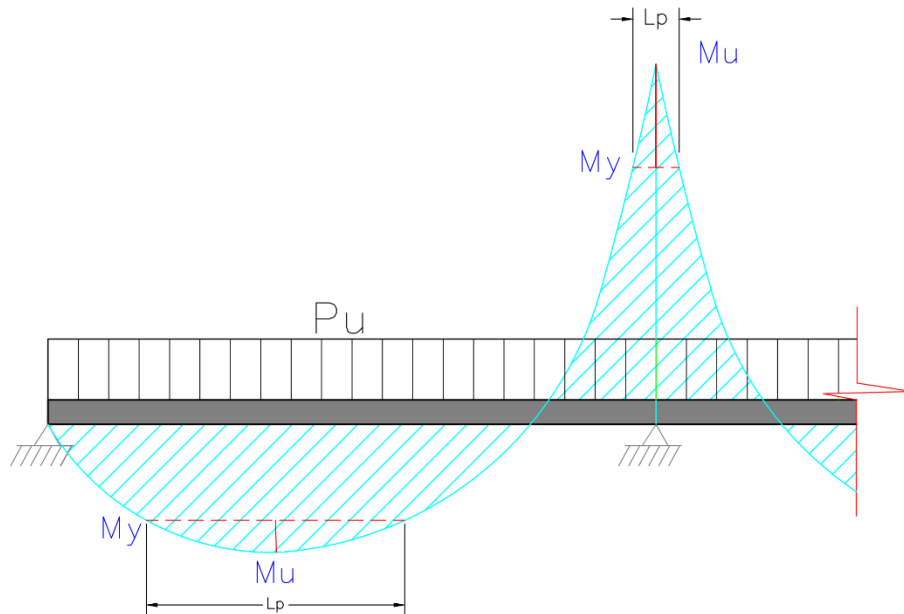


Figura 21. Representación de la longitud plástica en rótulas de zonas de vano y de apoyos.

La curvatura a lo largo de todo el elemento varía de acuerdo con una parábola de segundo grado, igual que el momento, por supuesto: $\phi_{(x)} = Ax^2 + Bx + C$. Las condiciones de la ecuación para determinar los valores de los coeficientes A, B y C, son las siguientes:

$$\begin{aligned}\phi_{(0)} &= 0 \\ \phi\left(\frac{L_p}{2}\right) &= \phi_u - \phi_y \\ \phi'\left(\frac{L_p}{2}\right) &= 2Ax + B = 0\end{aligned}$$

Con estas condiciones, los coeficientes son:

$$A = -\frac{4 * (\phi_u - \phi_y)}{L_p^2} \quad ; \quad B = \frac{4 * (\phi_u - \phi_y)}{L_p} \quad ; \quad C = 0$$

Integrando la curvatura a lo largo de la longitud plástica se obtiene entonces la expresión para calcular la rotación plástica en este caso:

$$\theta_p = 2 \int_0^{\frac{L_p}{2}} \left[-\frac{4 * (\phi_u - \phi_y)}{L_p^2} * x^2 + \frac{4 * (\phi_u - \phi_y)}{L_p} * x \right] dx = \frac{2}{3} * (\phi_u - \phi_y) * L_p$$

$$\theta_p = \frac{2}{3} * (\phi_u - \phi_y) * L_p \quad (68)$$

Ya que en las estructuras de hormigón armado las secciones tienen una capacidad de rotación plástica limitada, ésta se encuentra muy ligada a la capacidad última de una estructura en sí. Mientras más capacidad de rotación tenga la estructura, mayor redistribución de esfuerzos puede lograr ésta en estado límite último acudiendo así a una mayor reserva de resistencia.

Lo cierto es que la capacidad plástica de rotación en estructuras hiperestáticas no solo se ve consumida por el efecto de las cargas, sino también por el efecto de las deformaciones impuestas que pueda sufrir la estructura como descensos de apoyos u otras deformaciones de origen térmico, por ejemplo.

Como consecuencia de lo anterior, se podría encontrar algún caso en el que una estructura no sea capaz de alcanzar cierta carga última deseada, ni de lograr un nivel de redistribución de esfuerzos esperado, debido a que no se ha tomado en cuenta el efecto de las acciones geométricas sobre la estructura.

Por lo tanto, el planteamiento general del concepto de rotación plástica efectiva es que la capacidad de rotación plástica de la estructura es el total de una componente de rotación debido a la demanda por cargas, más una segunda componente que corresponde a la demanda de rotación por las deformaciones impuestas. Al primer término se le llamará demanda de rotación mecánica, mientras que al segundo se le llamará demanda de rotación no mecánica.

Matemáticamente, esto se expresa tan simple como:

$$\theta_p = \theta_p^m + \theta_p^{nm} \quad (69)$$

Como consecuencia, para la verificación de la capacidad de rotación de las rótulas plásticas en una estructura de hormigón, la capacidad debe ser mayor que la rotación requerida como consecuencia de las cargas más la rotación requerida para acomodar las deformaciones impuestas que estén actuando sobre la estructura en ese momento.

3.2. Metodología de diseño no lineal en Estado Límite Último frente a cargas y deformaciones impuestas

3.2.1. Rigidez fisurada

Para el cálculo de las rotaciones y deformaciones que sufre la estructura bajo el efecto de las cargas es muy importante detenerse a pensar en qué valor de rigidez ha de asignársele a los elementos que la componen.

Es importante recordar que en Estado Límite Ultimo la estructura se encuentra a muy altos niveles de fisuración debido a la magnitud de los esfuerzos que actúan para llevarla hasta la rotura. La fisuración reduce considerablemente la rigidez de las zonas del elemento donde esta se produce.

Ahora bien, el valor de la rigidez fisurada depende de la cantidad de refuerzo a tracción, la cual, en muchos casos no es homogénea a lo largo de todo un elemento. El ejemplo más común de esto es el refuerzo de losas o vigas continuas, donde se debe disponer una armadura de tracción en la parte inferior de la sección para soportar los momentos positivos en las zonas de vano, y armadura de tracción en la parte superior de la sección en las zonas de apoyo para soportar los momentos negativos. Esto conlleva a que la rigidez fisurada del elemento sea discontinua y variable en toda la longitud del elemento. En el caso de elementos continuos se

tendrían únicamente dos valores de rigidez fisurada como mínimo, asumiendo que el refuerzo sea igual en todas las zonas de positivos y de negativos.

En el Anejo 8 de la Instrucción Española EHE-08, se presenta la siguiente expresión para calcular la inercia fisurada de una sección rectangular con armaduras de refuerzo a tracción y a compresión:

$$I_f = nA_{s1}(d - x) \left(d - \frac{x}{3} \right) + nA_{s2}(x - d') \left(\frac{x}{3} - d' \right) \quad (70)$$

En el caso de secciones en T, en los que la profundidad de la fibra neutra sea mayor que el espesor de las alas, se propone las siguientes expresiones:

$$I_f = I_c + nA_{s1}(d - x)^2 + nA_{s2}(x - d')^2 \quad (71)$$

$$I_c = bh_o \left[\frac{h_o^2}{12} + \left(x - \frac{h_o}{2} \right)^2 \right] + \frac{b_o(x - h_o)^3}{3} \quad (72)$$

Siendo n la relación modular entre los materiales que componen la sección E_s/E_c .

Los cálculos de las rotaciones y deformaciones se simplifican enormemente cuando la rigidez de un elemento es constante en toda su longitud. Inclusive, en el método general para calcular las rotaciones requeridas en las rótulas plásticas que se presenta en el estado del conocimiento de este documento, se cuenta con que la rigidez EI sea constante en todo el vano. Por ello se ha considerado desarrollar una expresión para calcular la rigidez equivalente del vano en función de las longitudes de tramo con las distintas rigideces.

Imaginando un tramo simplemente apoyado de extremos A y B como el de la figura 22, que podría ser el vano extremo de una viga continua luego de que se forma una rótula plástica en el apoyo interno. El planteamiento básico ha sido que, para la pieza con rigidez discontinua, el giro en el extremo B al aplicar un momento puntual en dicho punto sea el mismo que para una pieza de rigidez constante equivalente.

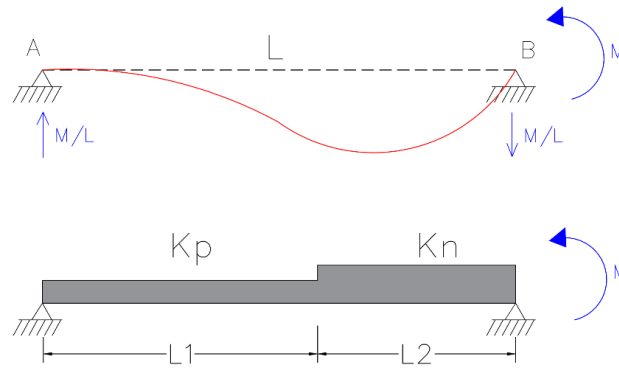


Figura 22. Viga simplemente apoyada de rigidez discontinua.

El desarrollo de la expresión es el siguiente:

$$\theta_B = \theta_A + \int_0^L \frac{M(x)}{EI(x)} dx$$

Se sabe por conceptos básicos de mecánica de materiales que el giro en A es igual a la mitad del giro en B y de signo contrario $\theta_A = -\frac{\theta_B}{2}$.

$$\theta_B = -\frac{\theta_B}{2} + \int_0^L \frac{M(x)}{EI(x)} dx \quad \rightarrow \quad \theta_B = \frac{2}{3} * \int_0^L \frac{M(x)}{EI(x)} dx$$

Si se desarrolla la integral para el caso básico de EI constante se obtiene efectivamente el valor esperado que se conoce por resistencia de materiales:

$$\theta_B = \frac{2}{3} * \int_0^L \frac{M}{EI} * \frac{x}{L} dx = \frac{2}{3} \frac{M}{EI} \left[\frac{x^2}{2L} \right]_0^L = \frac{2}{3} \frac{M}{EI} \frac{L^2}{2L} = \frac{ML}{3EI}$$

Ahora, tomando en cuenta la discontinuidad de la rigidez de la pieza:

$$\begin{aligned} \theta_B &= \frac{2}{3} * \left[\int_0^{L_1} \left(M * \frac{x}{L} \right) \left(\frac{1}{K_p} \right) dx + \int_{L_1}^L \left(M * \frac{x}{L} \right) \left(\frac{1}{K_n} \right) dx \right] \\ &= \frac{2}{3} * \frac{M}{L} \left[\frac{1}{K_p} \int_0^{L_1} x dx + \frac{1}{K_n} \int_{L_1}^L x dx \right] = \frac{2}{3} \frac{M}{L} \left[\frac{1}{K_p} \left(\frac{L_1^2}{2} \right) + \frac{1}{K_n} \left(\frac{L^2}{2} - \frac{L_1^2}{2} \right) \right] \\ \theta_B &= \frac{2}{3} \frac{M}{L} \left(\frac{1}{2} \right) \left[\frac{L_1^2}{K_p} + \frac{L^2}{K_n} - \frac{L_1^2}{K_n} \right] \end{aligned}$$

Si se define que $L_1 = \beta L$,

$$\theta_B = \frac{M}{3L} \left[\frac{\beta^2 L^2}{K_p} + \frac{L^2}{K_n} - \frac{\beta^2 L^2}{K_n} \right] = \frac{ML}{3} \left(\frac{\beta^2}{K_p} + \frac{1 - \beta^2}{K_n} \right)$$

Ahora se iguala esta expresión con el giro en caso de que sea un elemento de rigidez constante:

$$\frac{ML}{3} \left(\frac{\beta^2}{K_p} + \frac{1 - \beta^2}{K_n} \right) = \frac{ML}{3K_{eq}}$$

$$K_{eq} = \frac{1}{\frac{\beta^2}{K_p} + \frac{1 - \beta^2}{K_n}} \quad , \quad \text{siendo } \beta = \frac{L_1}{L} \quad (73)$$

Siendo K_p y K_n las rigideces de las zonas con refuerzo positivo y refuerzo negativo, respectivamente.

De esta manera se puede utilizar una rigidez fisurada equivalente de valor constante que permite simular el comportamiento del elemento con rigideces diferentes dentro de su longitud.

La rigidez equivalente anterior es utilizada en los casos en los que la rótula plástica se forma primeramente encima de un apoyo intermedio. En los casos en que la rótula plástica se formara en las zonas de momentos positivos dentro del vano, la deflexión y la rotación que sufra el punto teórico donde se forma la rótula plástica depende básicamente de la rigidez del voladizo y el vano adyacente en conjunto, tal como se muestra en la siguiente figura.

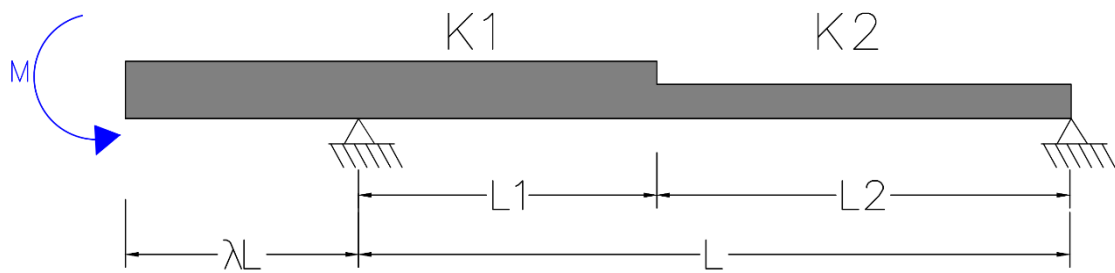


Figura 23. Rigidez equivalente en caso de rótulas plásticas en el vano.

Desarrollando un proceso similar al anterior, la expresión resultante para la rigidez equivalente de este caso es la siguiente:

$$K_{eq} = - \frac{K_n K_p * (3\lambda + 1)}{K_n * (\beta - 1)^3 - K_p * (\beta^3 - 3 * \beta^2 + 3 * \beta + 3\lambda)} \quad , \quad \text{siendo } \beta = \frac{L_1}{L} \quad (74)$$

Adicionalmente, para los casos en los que se tengan más de dos armados distintos en un vano o en el voladizo, se recomiendan las siguientes ecuaciones.

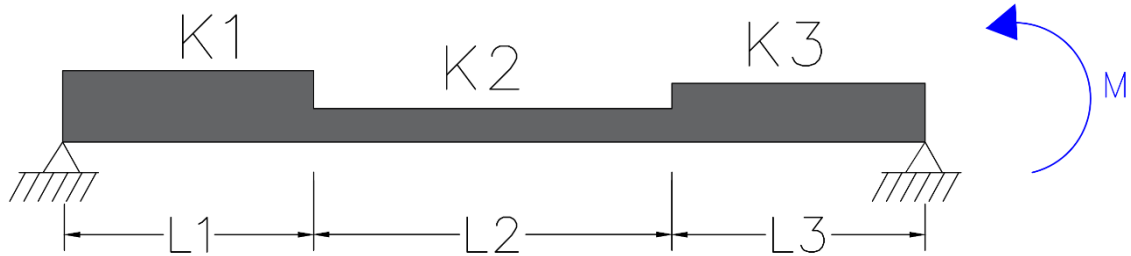


Figura 24. Rigidez equivalente para tramos con 3 rigideces distintas y formación de rótulas en las zonas de apoyo.

$$K_{eq} = \frac{K_1 K_2 K_3 L^2}{L_1^2 K_2 (K_3 - K_1) + 2 L_1 L_2 K_1 (K_3 - K_2) + L_2^2 K_1 (K_3 - K_2) + L^2 K_1 K_2} \quad (75)$$

$$K_{eq} = \frac{-K_1 K_2 K_3 (3\lambda + 1)}{K_1 K_2 (\beta + \xi - 1)^3 - K_1 K_3 \xi (3\beta^2 + 3\beta(\xi - 2) + \xi^2 - 3\xi + 3) - K_2 K_3 (\beta^3 - 3\beta^2 + 3\beta + 3\lambda)} \quad (76)$$

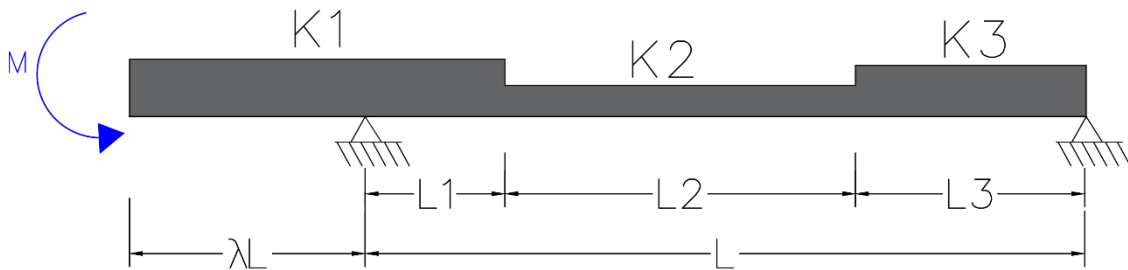


Figura 25. Rigidez equivalente para tramos con tres rigideces distintas y formación de rótulas plásticas en las zonas de vano.

Siendo $\beta = \frac{L_1}{L}$ y $\xi = \frac{L_2}{L}$

En ciertos casos se plantea como solución simplificada la consideración de que el elemento se encuentra fisurado en toda su longitud. Esta hipótesis, en el caso de secciones con una pequeña profundidad de fibra neutra x/d , sobreestima considerablemente las rotaciones plásticas requeridas para lograr un nivel de redistribución deseado.[13]

Por esta razón, para tomar en consideración un comportamiento más realista en los cálculos presentados, y además, incluir el efecto del aporte del hormigón a tracción entre fisuras, se plantea la solución adoptada por el ACI del concepto de la inercia efectiva. Este concepto consiste en una interpolación entre el valor bruto de la inercia de la sección íntegra, y el valor de la inercia fisurada. La expresión que se utiliza para calcular la inercia efectiva es la siguiente:

$$I_{eff} = \left(\frac{M_{cr}}{M_a}\right)^3 * I_g + \left[1 - \left(\frac{M_{cr}}{M_a}\right)^3\right] * I_{cr} \quad (77)$$

3.2.2. Rótulas plásticas en zonas de momentos negativos

Para este segmento se tomará como ejemplo básico de partida una viga continua de dos vanos iguales a cada lado del apoyo central, justo como se muestra en la figura 26 más abajo.

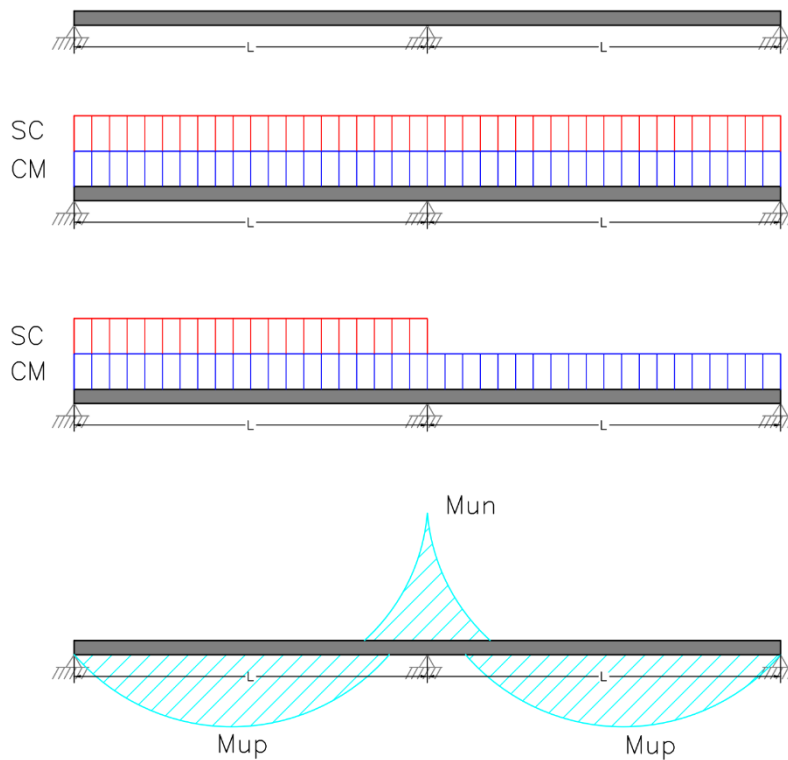


Figura 26. Viga continua de dos vanos iguales.

Normalmente, el dimensionamiento de las armaduras de esta viga se haría a partir de los esfuerzos máximos obtenidos de un análisis lineal estático, presentados en una envolvente. Según la teoría elástica, la carga última de la estructura se produciría cuando se alcance el momento máximo negativo en el apoyo central, o el momento máximo positivo en alguno de los vanos. La realidad es que gracias a la ductilidad con la que cuentan las secciones de hormigón armado, y del grado de redundancia con el que cuentan las estructuras estáticamente indeterminadas, el colapso de la estructura no se produciría sino hasta que alguna sección de esta agote su capacidad máxima de rotación plástica o que se formen suficientes rótulas plásticas como para producir un mecanismo de colapso. Hasta entonces, lo que ocurre en la estructura es una importante redistribución de esfuerzos desde el instante en que la sección de apoyo alcanza su momento de plastificación M_y , ocurriendo entonces que las secciones interiores en los vanos empiecen a asumir mayores esfuerzos.

En el instante en que se alcanza la carga última de la viga, es posible aislar el estado de esfuerzos de un solo vano tal como se muestra en la figura 27.

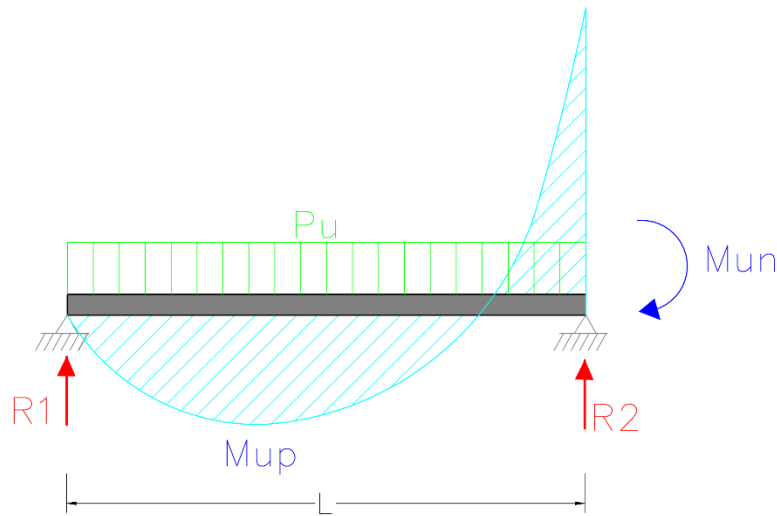


Figura 27. Vano aislado, sometido a sus esfuerzos últimos.

A partir de este diagrama de cuerpo libre y sus condiciones de equilibrio, es posible desarrollar una expresión para predecir cuál es el valor de la carga última P_u que provoca este estado de esfuerzos en el vano. Primeramente, las ecuaciones de equilibrio útiles serían: equilibrio traslacional en el sentido vertical, y equilibrio rotacional.

$$R_1 + R_2 = P_u * L \quad (78)$$

$$R_1 * L + M_{un} = \frac{P_u * L^2}{2} \quad (79)$$

El momento máximo positivo en el vano se puede relacionar en función de la reacción R_1 , a partir de la función de momento flector en el vano.

$$M_{u(x)} = R_1 * x - \frac{P_u * x^2}{2} \quad (80)$$

$$M'_{u(x)} = R_1 - P_u * x \quad (81)$$

El punto en el que se genera el momento máximo es cuando la pendiente de la función de momento flector se hace igual a cero.

$$R_1 - P_u * x_{max} = 0 \rightarrow x_{max} = \frac{R_1}{P_u}$$

El momento máximo positivo es entonces:

$$M_{max} = R_1 * \frac{R_1}{P_u} - \frac{P_u}{2} * \frac{R_1^2}{P_u^2} = M_{up}$$

$$M_{up} = R_1^2 * \left[\frac{1}{P_u} - \frac{1}{2P_u} \right] = \frac{R_1^2}{2P_u} \quad (82)$$

Y, por lo tanto,

$$P_u = \frac{R_1^2}{2M_{up}} \quad (83)$$

Entonces, sustituyendo la expresión (57) en la (53):

$$R_1 * L + M_{un} = \frac{R_1^2}{2M_{up}} * \frac{L^2}{2}$$

$$\frac{R_1^2}{2M_{up}} * \frac{L^2}{2} - R_1 * L - M_{un} = 0 \quad (84)$$

La cual es una ecuación de segundo grado cuya incógnita es R_1 , y su valor se puede obtener con la fórmula general para polinomios de segundo grado:

$$a = \frac{l^2}{4M_{up}} ; \quad b = -l ; \quad c = -M_{un}$$

$$R_1 = \frac{l \pm \sqrt{l^2 - 4 \left(\frac{l^2}{4M_{up}} \right) (-M_{un})}}{2 \left(\frac{l^2}{4M_{up}} \right)}$$

$$R_1 = \frac{2M_{up}}{l} * \left(1 + \sqrt{1 + \frac{M_{un}}{M_{up}}} \right) \quad (85)$$

Con las expresiones (57) y (59), es posible calcular la carga última que soporta la estructura según la capacidad de resistir momento flector de las secciones de vano

y las secciones de apoyo. Este es el valor de la carga que resistiría la estructura contando con que las secciones sean capaces de desarrollar una rotación plástica suficiente para ello.

Para relacionar las rotaciones plásticas con las cargas en la etapa en la que ya se supone que han plastificado las armaduras en las secciones del apoyo central, se puede valer de la siguiente relación:

$$\theta_m = \frac{\Delta P * l^3}{24 * EI_{eq}} \quad (86)$$

Donde ΔP es la diferencia entre el valor de la carga que produce la plastificación en la sección del apoyo y la carga última de la estructura $P_u - P_{el}$. Esta es la componente mecánica del giro plástico que se necesita para alcanzar la carga última de colapso de la estructura.

La rotación plástica que logra desarrollar la estructura en la zona del apoyo intermedio hasta que alcanza su agotamiento debe ser el menor de los siguientes valores:

- La rotación plástica total que puede desarrollar la sección. Esto hace referencia al caso de cuando el agotamiento de la estructura ocurre porque ya la rótula plástica no es capaz de alcanzar mayor rotación. Este valor se obtiene de la relación momento-curvatura de la sección crítica.

$$\theta_{max.secc}^p = \frac{\varphi_u - \varphi_y}{2} * l_p \quad (87)$$

La longitud plástica l_p de la expresión, se calcula con ayuda de la expresión (45), tomando en cuenta que la longitud de plastificación se forma a ambos lados del apoyo central.

$$l_p = 2 \left(\frac{M_u - M_y}{V_d} + 0.5z \right) \quad (88)$$

- La rotación plástica que genera un mecanismo de colapso en la estructura, es decir, la rotación requerida para alcanzar el valor de carga P_u . Se puede calcular el valor de esta rotación plástica de la siguiente manera.

$$\theta_{colapso}^p = \frac{\Delta P * L^3}{24 EI_{eq}} = \frac{(P_u - P_{el}) * L^3}{24 EI_{eq}} \quad (89)$$

P_{el} es el valor de la carga al momento de que se alcanza M_y en la sección del apoyo central, la cual sería la carga última de la estructura según la teoría elástica. La relación entre la carga y el momento en este caso, como bien se conoce por mecánica de materiales, está dada por la expresión:

$$M_{un} = \frac{P_{el} * L^2}{8} \quad (90)$$

Por lo tanto, despejando la carga:

$$P_{el} = \frac{8 * M_{un}}{L^2} \quad (91)$$

Siendo L la longitud del vano, por supuesto.

Como ya se había planteado en la ecuación (47), la capacidad de rotación plástica de la sección crítica debe ser suficiente para poder acomodar las rotaciones debido a las acciones mecánicas más las acciones no mecánicas.

$$\theta^p = \frac{\Delta P * L^3}{24 EI_{eff}} + \theta^{nm} \quad (92)$$

De esta expresión es posible despejar ΔP y obtener así una expresión que hace posible calcular la reserva de resistencia en la estructura en función de la capacidad máxima de rotación plástica y los efectos de las deformaciones impuestas.

$$\Delta P = \frac{24 EI_{eff}}{L^3} * (\theta^p - \theta^{nm}) \quad (93)$$

De manera que se pueda apreciar de manera práctica el procedimiento y la utilización de las expresiones desarrolladas, se ha decidido presentar en siguiente ejemplo más abajo. Se pretende comparar los resultados obtenidos con este método, con los resultados de un análisis no lineal explícito a través de la herramienta CONS, desarrollada por el profesor Antonio Mari Bernat.[14]

El ejemplo constará de una franja de losa con ancho unitario y espesor de 0.30m. La resistencia a compresión característica del hormigón se considerará de $f_{ck}=30\text{MPa}$ y armadura de refuerzo tipo B500-SD con límite elástico característico de $f_{yk}=500\text{MPa}$. La longitud de vano es de 6 metros. La carga uniforme de peso propio y cargas permanentes es de $g=20\text{ kN/m}$ y una sobrecarga de uso de $q=20\text{ kN/m}$. El refuerzo de armadura pasiva en la zona de centro de vano para soportar los momentos positivos mayorados $M_{up}=171.7\text{kNm}$, asumiendo que la sobrecarga de uso solo actúa en un solo vano, es de $1,705\text{mm}^2$. En la sección intermedia de apoyo, para hacer frente al momento máximo negativo, asumiendo la sobrecarga de uso distribuida en toda la longitud de ambos vanos, la armadura pasiva es de $2,670\text{mm}^2$, para actuar frente a un momento de $M_{un}=256.5\text{kNm}$. En la siguiente figura, se representa gráficamente la disposición del refuerzo del modelo hecho en CONS.

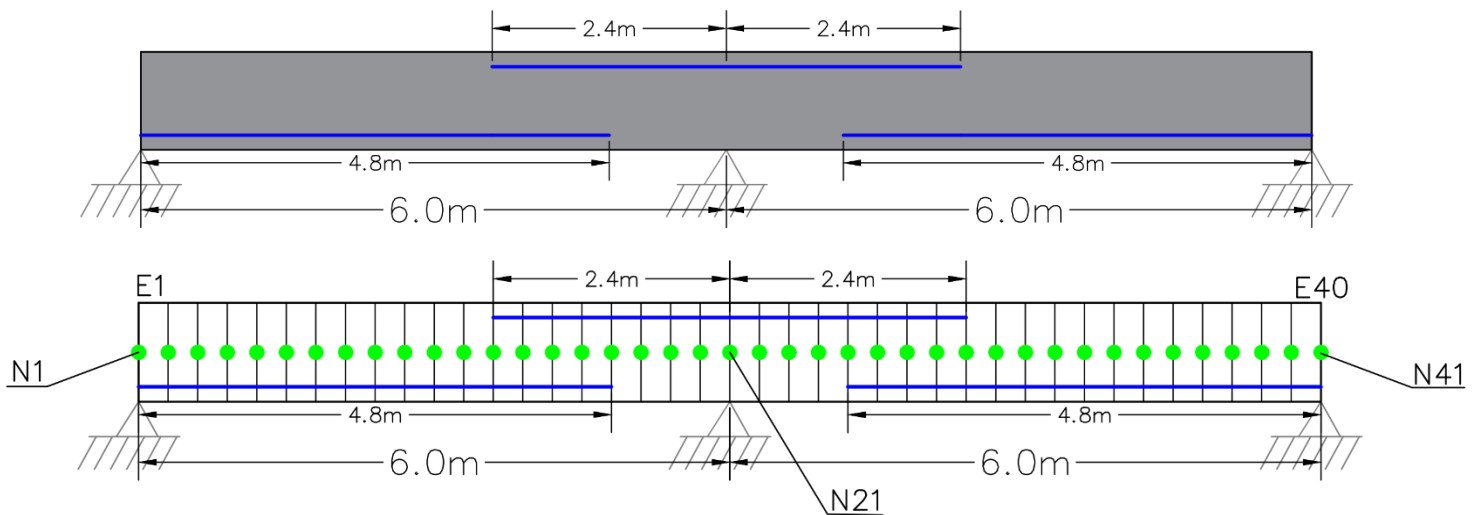


Figura 28. Esquema del modelo utilizado en CONS.

Las relaciones momento-curvatura de las secciones críticas en las zonas de momento negativo y momento positivo, se presentan en el siguiente diagrama.

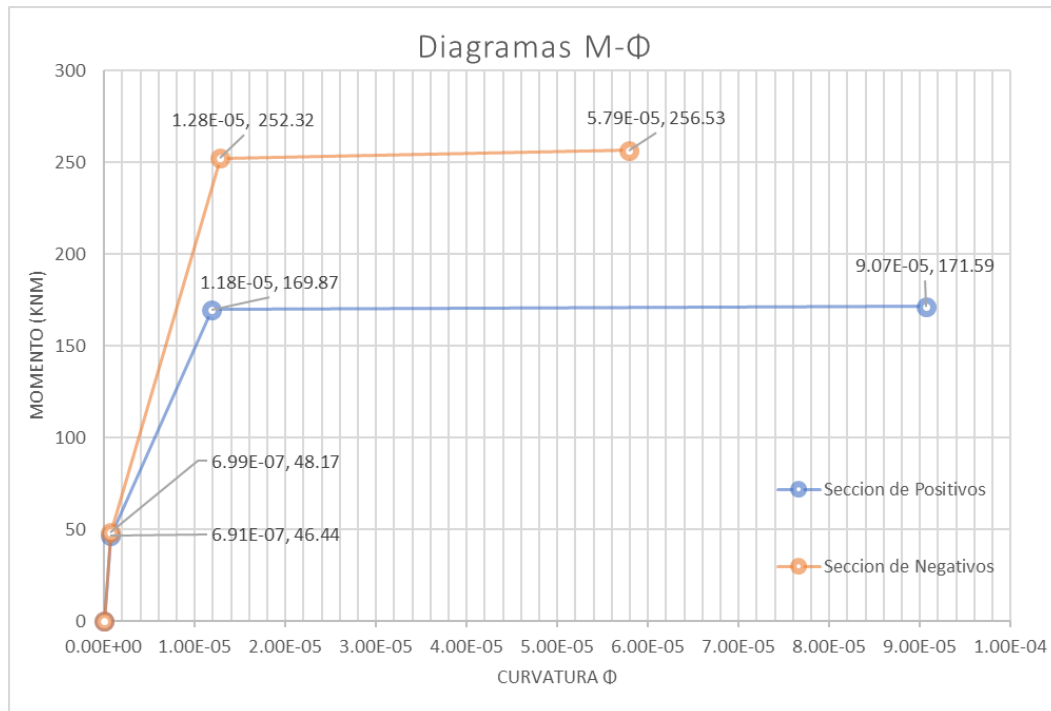


Figura 29. Diagramas momento-curvatura de ambas secciones.

Se puede observar que la sección de momentos positivos tiene una menor capacidad de resistencia, pero sin embargo una mayor ductilidad, tal como lo demuestra su curvatura última; en el caso de la sección de momentos negativos, el caso es el contrario, con una mayor resistencia última, pero con menor ductilidad. A continuación, se presentan las características de los materiales, así como las propiedades calculadas de ambas secciones.

Materiales		
Hormigón		
$f_{ck} =$	30.0	N/mm ²
$\gamma_c =$	1.50	
$f_{cd} =$	20.0	N/mm ²
$f_{ctm} =$	2.90	N/mm ²
$E_c =$	28,576.79	N/mm ²
Acero		
$f_{yk} =$	500.0	N/mm ²
$\gamma_s =$	1.15	
$f_{yd} =$	434.78	N/mm ²
$E_s =$	200,000.0	N/mm ²
$n =$	7.00	

Tabla 10. Propiedades de los materiales utilizados.

Propiedad	Sección		Unidad
	Negativos	Positivos	
As=	2,670.0	1,705.0	mm ²
ρ=	0.01068	0.00682	
v=	144.9	146.7	mm
v'=	155.1	153.3	mm
x/d=	0.319	0.265	
x=	79.8	66.2	mm
I _g =	2.41E+09	2.35E+09	mm ⁴
I _{cr} =	7.11E+08	5.00E+08	mm ⁴
M _{cr} =	48.17	46.44	kNm
I _{eff} =	7.22E+08	5.36E+08	mm ⁴
K _{eff} =	20,631.15	15,330.92	kNm ²

Tabla 11. Propiedades de las secciones calculadas.

La rigidez equivalente del vano según la ecuación (51), se calculó con una longitud de armadura positiva de $L_1=3.6\text{m}$ y longitud negativa $L_2=2.4\text{m}$, y con las rigideces mostradas en la tabla anterior.

$$I_{eq} = \frac{1}{\frac{\beta^2}{K_p} + \frac{1-\beta^2}{K_n}} = 6.42 \times 10^8 \text{ mm}^4, \quad \text{siendo } \beta = \frac{L_1}{L} = \frac{3.6}{6.0} = 0.6$$

$$\text{Por lo tanto, } K_{eq} = 18,347.61 \text{ kNm}^2$$

A continuación, se calculan los valores de R_1 , P_{el} y P_{up} .

$$R_1 = \frac{2M_{up}}{L} * \left(1 + \sqrt{1 + \frac{M_{un}}{M_{up}}} \right) = 147.62 \text{ kN}$$

$$P_{el} = \frac{8 * M_{un}}{L^2} = 57.0 \text{ kN/m}$$

$$P_{up} = \frac{R_1^2}{2M_{up}} = 63.46 \text{ kN/m}$$

Para calcular la longitud plástica se necesita conocer el cortante V en la sección crítica:

$$V_d = R_1 - P_{up} * L = -233.10 \text{ kN}$$

Y, por lo tanto, la longitud plástica L_p será:

$$l_p = 2 \left(\frac{M_u - M_y}{V_d} + 0.5z \right) = 225.02 \text{ mm}$$

Donde se ha aproximado $z \cong 0.9d$.

Luego, se ha calculado la rotación plástica máxima admisible de la estructura, que se recuerda que es la menor entre la capacidad máxima de la sección crítica donde se ha formado la rótula, y aquella en la que se produciría un mecanismo de colapso de la estructura.

$$\theta_{max.secc}^p = \frac{\varphi_u - \varphi_y}{2} * l_p = 0.005075 \text{ radianes} \quad \textcolor{red}{\times}$$

$$\theta_{colapso}^p = \frac{\Delta P * L^3}{24 EI_{eq}} = \frac{(P_u - P_{el}) * L^3}{24 EI_{eq}} = 0.003167 \text{ radianes} \quad \textcolor{green}{\leftarrow}$$

Se observa que la rotación plástica máxima admisible está condicionada por la formación del mecanismo de colapso. A continuación, la ecuación resultante de ΔP es de la siguiente manera.

$$\Delta P = \frac{24EI_{eq}}{L^3} * (\theta^p - \theta^{nm}) = \frac{24 * (18,347.61)}{6^3} * (0.003167 - \theta^{nm})$$

$$\Delta P = 6.4563 - 2,038.62 * \theta^{nm}$$

Si, por ejemplo, se produjera un asentamiento δ en los estribos, la rotación impuesta en dicho punto tendría un valor de $\theta^{nm} = \delta/L$. En la siguiente tabla, se muestra la variación de ΔP para valores de δ entre 0.0 a 0.10m. El valor de la carga última que produce el agotamiento P_u es, por supuesto, $P_{el} + \Delta P$. El valor de P_u obtenido se compara con los valores de carga última calculados a través de un análisis no lineal con ayuda del CONS. En la siguiente tabla se muestran los resultados:

δ (m)	θ^{nm} (rad)	ΔP (kN/m)	PROPUESTA		CONS		% Error
			$P_u = (P_{el} + \Delta P)$	P_u/P_{uo}	P_u (kN/m)	P_u/P_{uo}	
0.00	0.0000	6.46	63.46	1.00	63.45	1.00	0.01%
0.01	0.0017	3.06	60.06	0.95	60.85	0.96	1.31%
0.02	0.0033	-0.34	56.66	0.89	58.00	0.91	2.31%
0.03	0.0050	-3.74	53.26	0.84	55.00	0.87	3.16%
0.04	0.0067	-7.13	49.87	0.79	52.40	0.83	4.83%
0.05	0.0083	-10.53	46.47	0.73	49.62	0.78	6.36%
0.06	0.0100	-13.93	43.07	0.68	46.62	0.73	7.62%
0.07	0.0117	-17.33	39.67	0.63	44.00	0.69	9.83%
0.08	0.0133	-20.73	36.27	0.57	41.37	0.65	12.32%
0.09	0.0150	-24.12	32.88	0.52	35.00	0.55	6.06%
0.10	0.0167	-27.52	29.48	0.46	34.70	0.55	15.05%

Tabla 12. Resultados del análisis y comparación con el CONS. (I)

Se ha obtenido una buena coincidencia entre los resultados provenientes de la ecuación propuesta, y los obtenidos con el CONS. Se observa que el error aumenta gradualmente según se incrementa la magnitud del ascenso en el apoyo δ , sin embargo, todos los resultados se muestran del lado de la seguridad. Esta comparación es bastante evidente si se grafican las relaciones P_u para ambos casos, siendo P_u la carga última que genera el agotamiento de la estructura. En la siguiente figura, se muestra dicho gráfico.

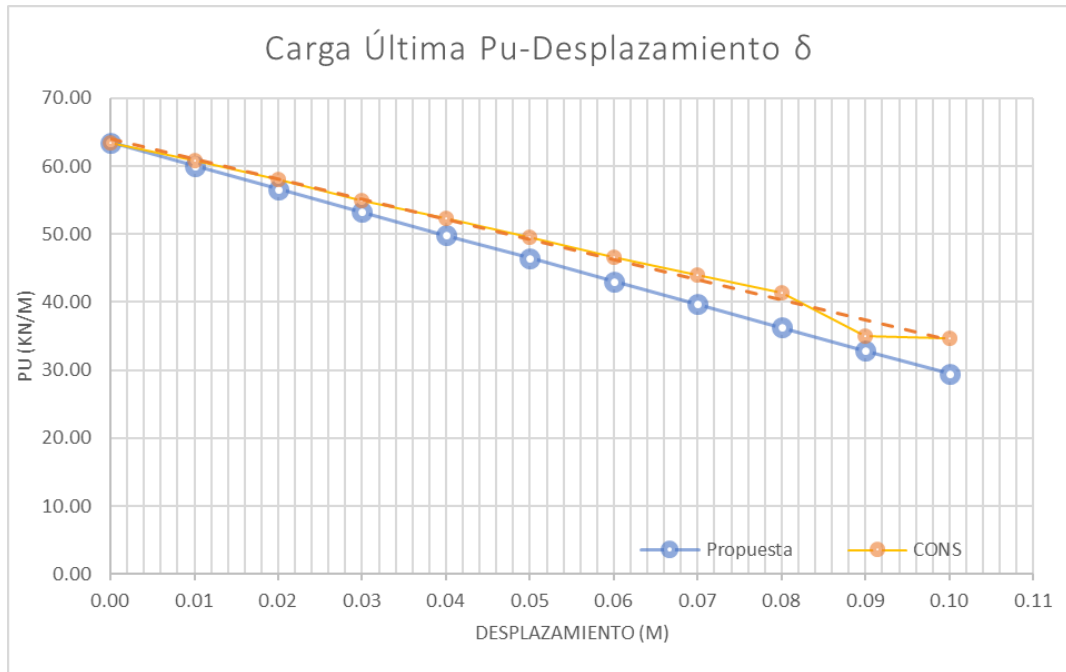


Figura 30. Comparación de resultados entre el método propuesto y CONS (I).

Cabe destacar que el análisis con el CONS se ha llevado a cabo aplicando en primer lugar las cargas permanentes y peso propio sobre la estructura. Como segunda etapa de construcción, se ha aplicado el desplazamiento del apoyo en cinco escalones graduales consecutivos. Finalmente, se aplicó e incrementó la sobrecarga sobre la estructura hasta que se produjera el colapso.

3.2.3. Rótulas plásticas en zonas de momentos positivos

Considerando el mismo ejemplo del segmento anterior, si en lugar de aplicar e incrementar la sobrecarga de uso sobre toda la longitud de la estructura se aplicara únicamente en un solo vano, el modo de fallo que se produciría sería un tanto distinto. En este caso, la sección crítica que alcanzará primero su momento de plastificación se encontraría en una zona intermedia del vano, y no en el apoyo. De esta forma, se formaría la rótula plástica en una región muy próxima a la mitad del vano, o sea, a $0.5L$. El diagrama de cuerpo libre del vano en el cual se forma la rótula, que se muestra en la siguiente figura, es muy parecido al utilizado anteriormente salvo que, en este caso, el momento positivo M_{up} se produce en el punto específico $0.5L$.

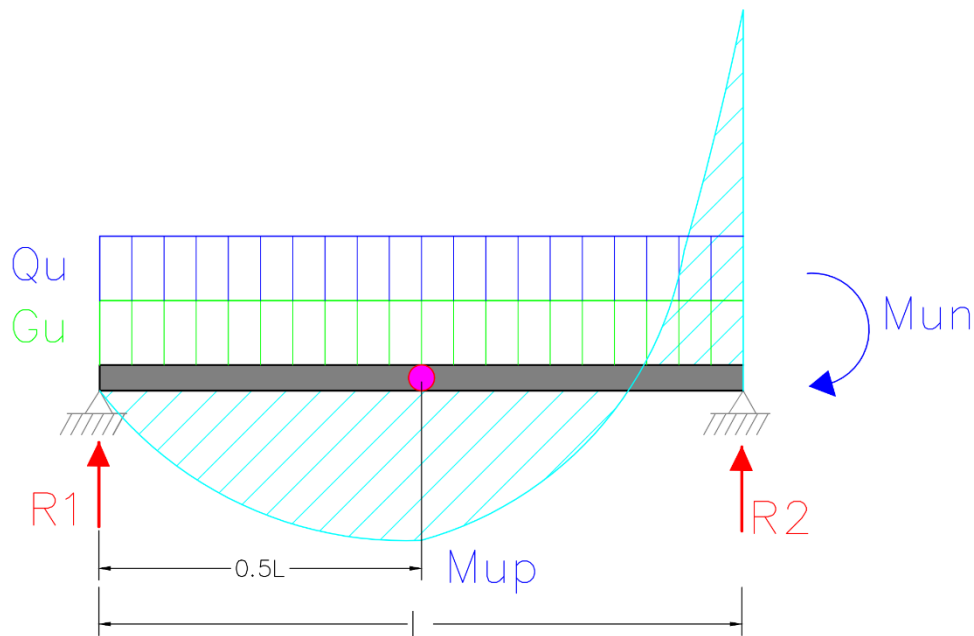


Figura 31. Diagrama de cuerpo libre del vano, con la rótula plástica a una distancia igual a $0.5L$

En este caso, debido a que las cargas permanentes de peso propio G_u y la sobrecarga de uso Q_u se encuentran aplicadas en dos configuraciones distintas, en lugar de hablar de carga total de agotamiento se trabajará con una sobrecarga de agotamiento. El valor de esta sobrecarga se puede obtener definiendo la ecuación de la parábola que define el diagrama de momento flector presentado en la figura 31. Dicha ecuación, haciendo un corte interno en el vano y planteando equilibrio rotacional, sería de la siguiente manera:

$$M_{(x)} = -\left(\frac{Q_u + G_u}{2}\right) * x^2 + R_1 x \quad (94)$$

Como la forma de esta parábola corresponde a un polinomio de segundo grado de la forma $y(x) = A * x^2 + B * x + C$, determinando el término A es posible determinar el valor de Q_u , mientras que con el parámetro B se obtiene el valor de la reacción R_1 . Los puntos conocidos de la parábola son:

$$\begin{aligned} x = 0, & \quad M = 0 \\ x = \alpha L, & \quad M = M_{up} \\ x = L, & \quad M = M_{un} \end{aligned}$$

Con estas tres condiciones se obtienen las expresiones correspondientes a los términos A, B, y C.

$$A = \frac{M_{un} - \frac{M_{up}}{\alpha}}{L^2(1 - \alpha)} \quad (95)$$

$$B = \frac{M_{up}}{\alpha L} - A * \alpha L \quad (96)$$

$$C = 0 \quad (97)$$

Siendo α la relación entre la posición de la rótula plástica en el vano y la longitud de dicho vano. Por ejemplo, en la figura 32, α es igual a 0.5.

Por consiguiente, la expresión para calcular la sobrecarga de agotamiento Q_u sería:

$$Q_u = -2 * \left(\frac{M_{un} - \frac{M_{up}}{\alpha}}{L^2(1 - \alpha)} + \frac{G_u}{2} \right) \quad (98)$$

La demanda de rotación plástica en la rótula que se forme en la zona intermedia depende tanto de la deflexión que se genere en dicho punto y la rotación del extremo del voladizo, tan como se muestra en la figura siguiente.

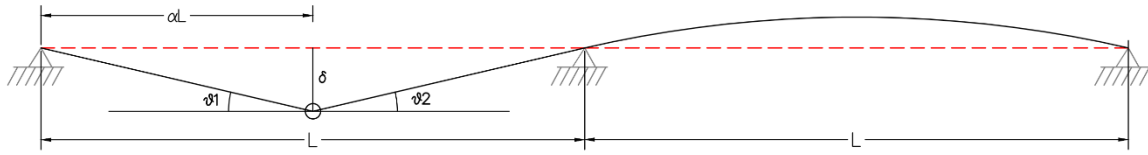


Figura 32. Esquema de la rotación total de la rótula formada en el vano.

Se puede observar que la rotación θ_1 es igual a: $\theta_1 = \frac{\delta}{\alpha L}$. Por otro lado, tanto δ como θ_2 , dependerán de las acciones actuantes sobre la estructura. Por esta razón, se han desarrollado las siguientes expresiones para poder calcular ambos valores para diferentes hipótesis de acciones actuando sobre la estructura: carga uniforme sobre toda la estructura, carga uniforme aplicada solamente en el vano de la rótula, y gradiente térmico de temperatura sobre toda la estructura.

✓ Carga uniforme repartida sobre toda la estructura:

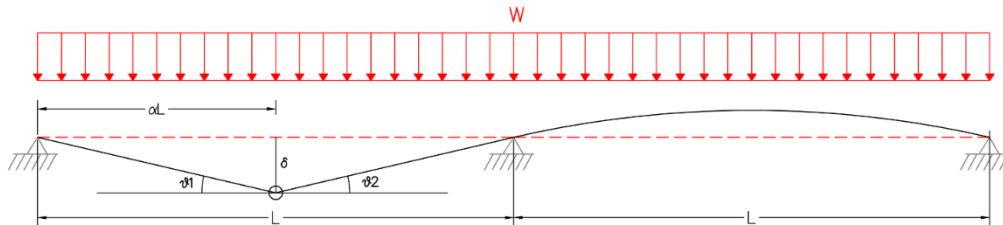


Figura 33. Esquema de rótula en vano con carga repartida uniforme en toda longitud.

$$\theta_2 = \frac{1}{EI} * \left[\frac{\alpha^3}{12} - \frac{5\alpha}{12} + \frac{7}{24} \right] * WL^3 \quad (99)$$

$$\delta = \frac{1}{EI} * \left[-\frac{\alpha^4}{24} + \frac{5\alpha^2}{12} - \frac{5\alpha}{8} + 0.25 \right] * WL^4 \quad (100)$$

- ✓ Carga uniforme repartida sobre el vano crítico solamente:

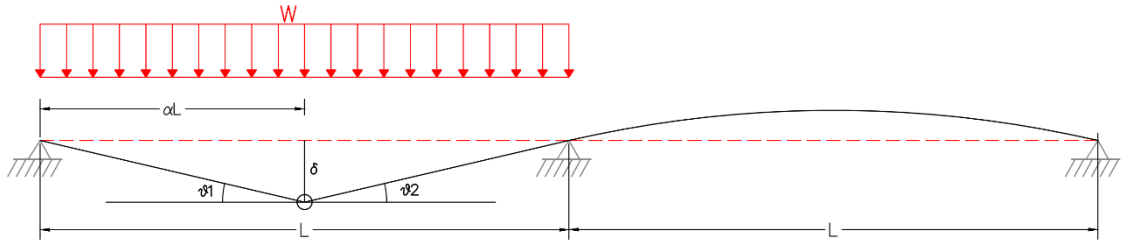


Figura 34. Esquema de rótula en vano con carga uniforme repartida en vano crítico.

$$\theta_2 = \frac{1}{EI} * \left[\frac{(\alpha^3 - 3\alpha + 2)}{12} - \frac{\alpha - 1}{6} \right] * WL^3 \quad (101)$$

$$\delta = \frac{1}{EI} * \left[-\frac{(\alpha - 1)^3(\alpha + 3)}{24} + \frac{\alpha^2 - 2\alpha + 1}{6} \right] * WL^4 \quad (102)$$

- ✓ Curvatura impuesta debido a un gradiente térmico:

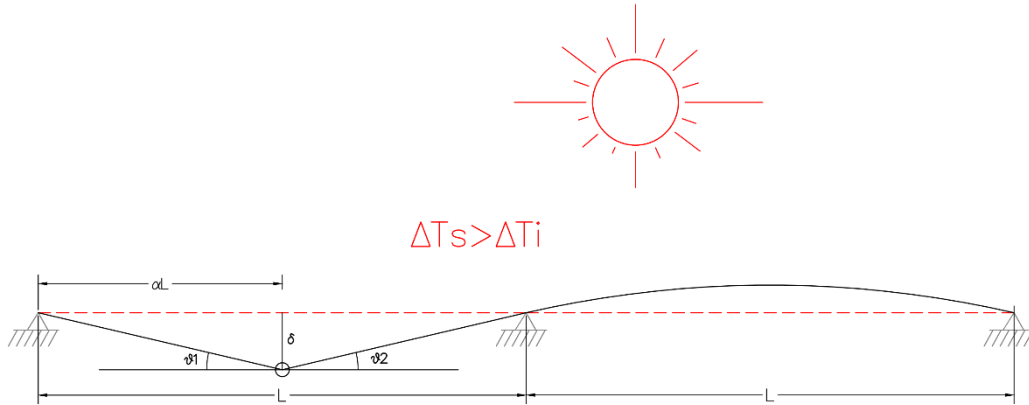


Figura 35. Esquema de rótula en vano sometida a un gradiente térmico.

$$\theta_2 = \frac{\alpha_c(\Delta T_i - \Delta T_s)}{h} * \left[(\alpha - 1)L - \frac{L}{2} \right] \quad (103)$$

$$\delta = \frac{\alpha_c(\Delta T_i - \Delta T_s)}{h} * \left[-\frac{(\alpha - 1)^2 L^2}{2} + \frac{(\alpha - 1)L^2}{2} \right] \quad (104)$$

Importante hay que indicar que estas expresiones dan como resultado valores positivos para deflexiones hacia abajo y rotaciones en sentido contrario a las manecillas del reloj.

A continuación, se ha decidido plantear un ejemplo práctico, que consta de la misma estructura discutida en la sección anterior, con la única diferencia de que en este caso la deformación impuesta viene generada por un descenso en el apoyo intermedio δ' . Esta acción geométrica sobre la estructura induce una curvatura de signo positivo, y por lo tanto, incrementa los momentos positivos mientras reduce los momentos negativos producidos por las cargas. Esta deformación impuesta, en conjunto con la configuración de la sobrecarga actuando únicamente sobre uno de los vanos, permite que la primera rótula plástica se forme dentro del vano.

La rotación plástica que demanda dicho descenso de apoyo se determina de la siguiente manera:

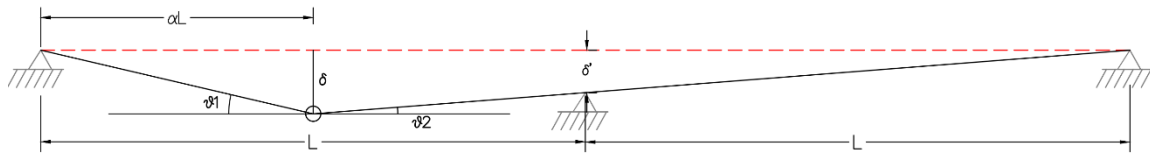


Figura 36. Rotación plástica en la rótula debido al descenso de apoyo δ' .

$$\theta_{nm}^p = \theta_{nm}^1 + \theta_{nm}^2$$

$$\theta_{nm}^1 = \frac{\delta}{\alpha L} \quad ; \quad \theta_{nm}^2 = \frac{(\delta - \delta')}{L + L(1 - \alpha)} = \frac{(\delta - \delta')}{L(2 - \alpha)} \quad ; \quad \delta = \delta' * \frac{L(2 - \alpha)}{L} = \delta' * (2 - \alpha)$$

La demanda de rotación plástica mecánica que conlleva el incremento de sobrecarga sobre el vano se calcula con ayuda de las expresiones (78) y (79), tomando como valor de $\alpha=0.5$, que es donde se prevé la formación de la rótula plástica, tal como se había mencionado al principio de esta sección.

$$\theta_m^1 = \frac{\delta}{\alpha L} = \frac{1}{EI_{eq}} * \left[-\frac{(0.5 - 1)^3(0.5 + 3)}{24} + \frac{0.5^2 - 2(0.5) + 1}{6} \right] * \Delta Q * L^4 * \frac{1}{(0.5)L}$$

$$\theta_m^1 = \frac{23}{192} * \frac{\Delta Q * L^3}{EI_{eq}}$$

$$\theta_m^2 = \frac{1}{EI_{eq}} * \left[\frac{(0.5^3 - 3(0.5) + 2)}{12} - \frac{0.5 - 1}{6} \right] * \Delta Q * L^3$$

$$\theta_m^2 = \frac{13}{96} * \frac{\Delta Q * L^3}{EI_{eq}}$$

$$\theta_p^m = \theta_m^1 + \theta_m^2 = \frac{49}{192} * \frac{\Delta Q * L^3}{EI_{eq}}$$

La sobrecarga total que supone el agotamiento de la estructura, cuando esta es solamente aplicada en un vano únicamente, se calcula con la expresión (75).

$$Q_u = -2 * \left(\frac{M_{un} - \frac{M_{up}}{\alpha}}{L^2(1 - \alpha)} + \frac{G_u}{2} \right) = -2 * \left(\frac{-256.5 - \frac{171.7}{0.5}}{6^2 * (1 - 0.5)} + \frac{1.35 * 20}{2} \right) = 39.68 \text{ kN/m}$$

Lo que supone un incremento ΔQ de 9.678 kN/m por encima de la sobrecarga elástica que produce el momento máximo positivo en el vano de $M_{up}=171.7$ kNm, y que, en teoría elástica, significaría el agotamiento de la estructura.

Las características de las secciones son idénticas a las mostradas de la tabla 6, sin embargo, la rigidez equivalente para este caso se calcula con la expresión (53) propuesta anteriormente, con $\beta = \frac{L_1}{L} = 0.4$ y $\lambda = 0.5$.

$$K_{eq} = - \frac{K_n K_p * (3\lambda + 1)}{K_n * (\beta - 1)^3 - K_p * (\beta^3 - 3 * \beta^2 + 3 * \beta + 3\lambda)} = 20,032.76 \text{ kNm}^2$$

La rotación plástica máxima admisible será, una vez más, la menor entre la capacidad de rotación máxima de la sección, y la rotación plástica que produzca el mecanismo de colapso en la estructura. A continuación, se llevan a cabo ambos cálculos para determinar cuál debe ser la rotación plástica máxima admisible. Primero, es necesario determinar la longitud plástica de la rótula que ha de formarse en el vano.

$$l_p = \sqrt{\frac{8(M_u - M_y)}{p_u}} = \sqrt{\frac{8 * (171.59 - 169.87)}{57}} = 0.4909 \text{ m} = 490.94 \text{ mm}$$

$$\theta_{max.sec}^p = \frac{2}{3} * (\varphi_u - \varphi_y) * l_p = \frac{2}{3} * (9.07 \times 10^{-5} - 1.18 \times 10^{-5}) * 490.94 = 0.02580 \text{ rad} \leftarrow$$

$$\theta_{colapso}^p = \frac{49}{192} * \frac{\Delta Q * L^3}{EI_{eq}} = \frac{49}{192} * \frac{(9.678) * 6^3}{20,032.76} = 0.02657 \text{ rad} \text{ x}$$

Se puede observar que, en este caso, la sección es capaz de desarrollar toda su capacidad.

Por lo tanto, la expresión correspondiente a la capacidad de incremento de sobrecarga ΔQ , en función de la capacidad de rotación plástica de la sección crítica y de la acción geométrica actuando sobre la estructura queda de la siguiente manera:

$$\Delta Q = \frac{192}{49} * \frac{EI_{eq}}{L^3} * (\theta^p - \theta^{nm}) = \frac{192}{49} * \frac{20,032.76}{6^3} * (0.02580 - \theta^{nm})$$

$$\Delta Q = 9.376 - 363.406 * \theta^{nm}$$

Es interesante comentar que, según la expresión anterior, para un valor nulo de acciones geométricas el incremento de sobrecarga admisible sería 9.376 kN/m; un valor ligeramente menor que el que fue calculado anteriormente de 9.678 kN/m. Esto se debe a que este último valor corresponde a una rotación plástica un poco mayor que la capacidad máxima de la sección, es decir, corresponde a la rotación plástica que genera un mecanismo de colapso.

En la siguiente tabla se comparan los resultados obtenidos con la expresión resultante variando el desplazamiento del apoyo de 0m a 0.05m. Por encima de los 0.05m, el mecanismo de falla de la estructura en el CONS cambia debido a la magnitud del momento negativo que este desplazamiento produce. Al igual que en el caso estudiado anteriormente, la diferencia entre los resultados incrementa a medida que se incrementa la magnitud del desplazamiento impuesto. Nuevamente, todos los resultados obtenidos se encuentran del lado de la seguridad con respecto a los resultados del CONS.

δ' (m)	θ_{nm} (rad)	ΔQ (kN/m)	PROPUESTA		CONS		% Error
			$Q_u = (Q_{el} + \Delta Q)$	Q_u / Q_{uo}	Q_u (kN/m)	P_u / P_{uo}	
0.00	0.0000	9.37	39.37	1.00	40.50	1.00	2.78%
0.01	0.0067	6.95	36.95	0.94	40.00	0.99	7.62%
0.02	0.0133	4.53	34.53	0.88	38.50	0.95	10.31%
0.03	0.0200	2.11	32.11	0.82	37.00	0.91	13.23%
0.04	0.0267	-0.32	29.68	0.75	35.00	0.86	15.19%
0.05	0.0333	-2.74	27.26	0.69	34.00	0.84	19.82%

Tabla 13. Resultados del análisis y comparación con el CONS (II).

En la próxima figura se puede apreciar la evolución de los resultados y de la comparación. Se han graficado nuevamente los valores de sobrecarga última en función del desplazamiento aplicado en el apoyo.

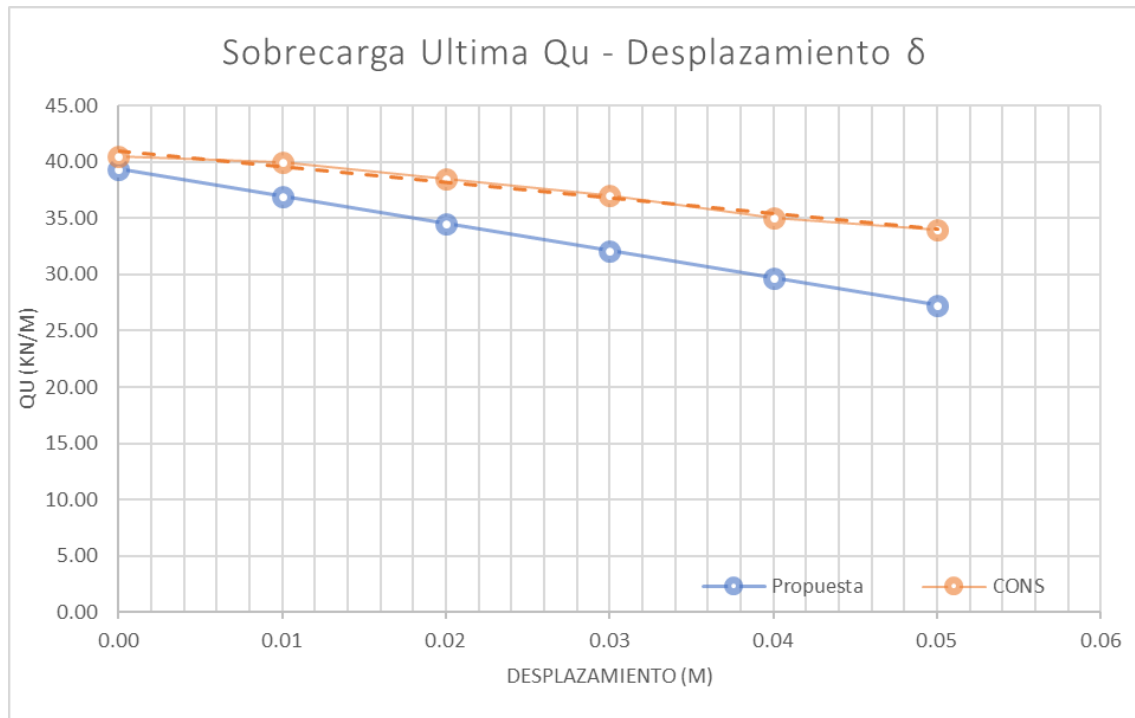


Figura 37. Comparación de resultados entre el método propuesto y CONS (II).

A continuación, se presenta también otro ejemplo de una estructura continua de 3 vanos, en el cual se produce la plastificación de la sección crítica en el centro del vano intermedio, ocurriendo así una redistribución de esfuerzos hacia los apoyos, incrementando los momentos negativos. Se busca estudiar el efecto que provocaría una curvatura impuesta por un gradiente térmico a lo largo de toda la estructura sobre su capacidad última. Dicha deformación impuesta, produciría una rotación plástica en la rótula central, consumiendo así parte de la ductilidad de dicha sección, y por consiguiente, afectando negativamente la capacidad última de la estructura para resistir cargas.

Se trata de un segmento de losa maciza continua a lo largo de tres vanos; siendo de 6 metros los vanos extremos, y de 10 metros el vano central. La sección analizada es de un ancho unitario y un canto total de 0.4m. Se han considerado las cargas permanentes como $g=20\text{kN/m}$ y la sobrecarga de uso $q=50\text{kN/m}$. Las armaduras han sido dispuestas tal como se muestra en la siguiente figura.

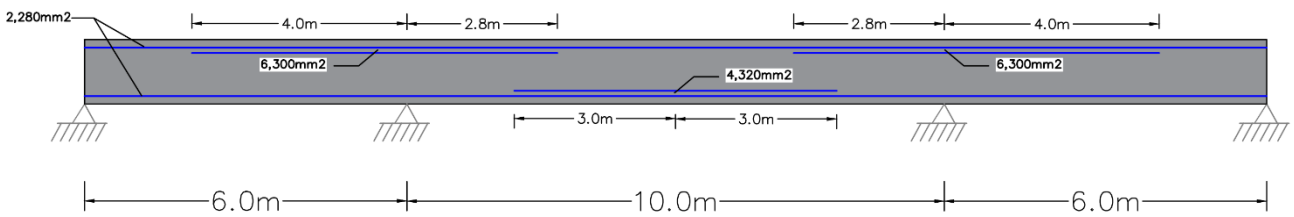


Figura 38. Esquema de la estructura analizada y disposición de armaduras.

Así mismo, la estructura modelada en CONS consta de 55 elementos iguales de 0.4m de longitud, con un total de 56 nodos. Es la siguiente figura se muestra el esquema de dicho modelo.

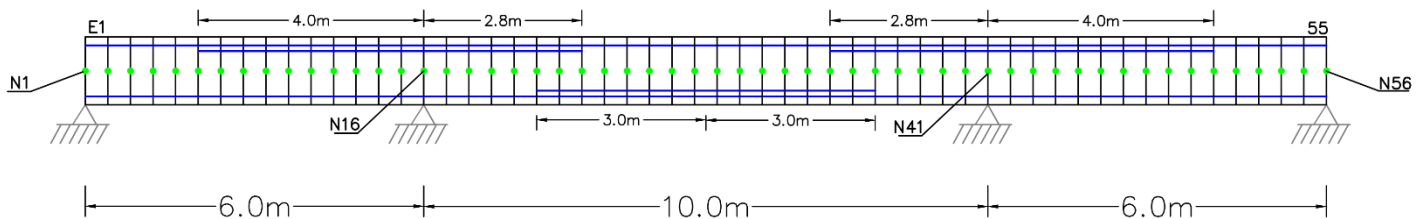


Figura 39. Esquema del modelo utilizado en CONS.

Según las propiedades descritas de las secciones, los diagramas momento-curvatura de las secciones críticas en el centro del vano intermedio y sobre los apoyos internos se muestran en la próxima figura.

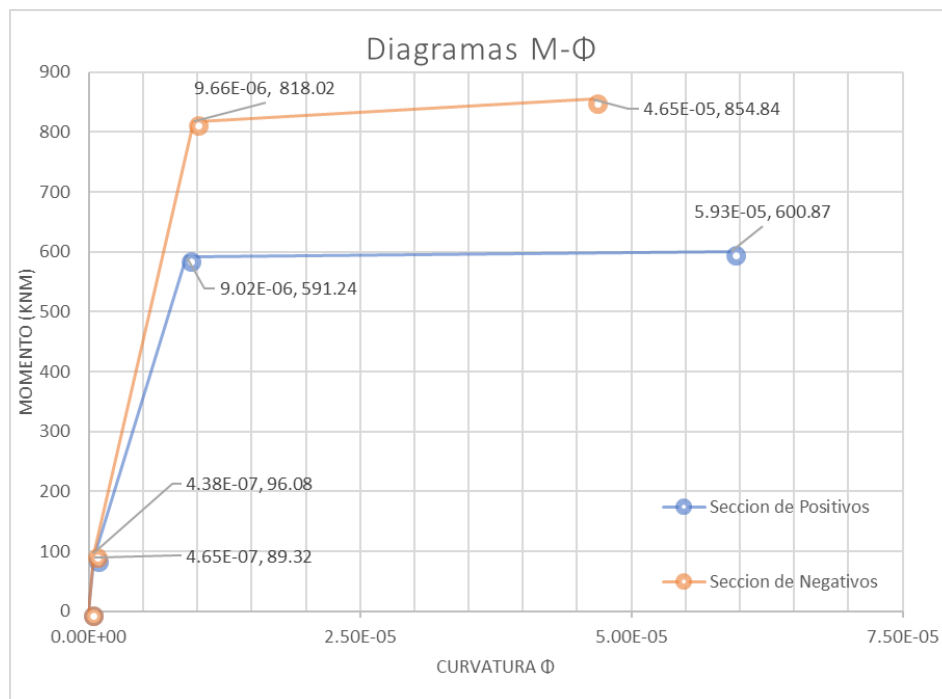


Figura 40. Diagramas momento-curvatura de las secciones críticas.

Las propiedades de los materiales, así como las propiedades mecánicas de las secciones se resumen en las siguientes tablas a continuación:

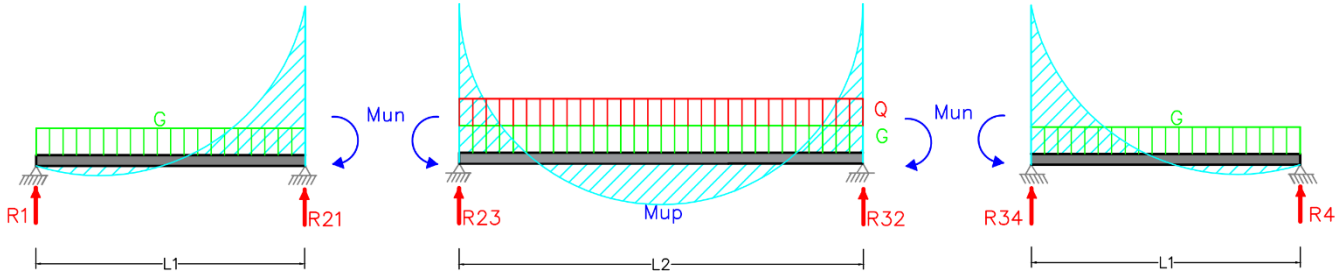
Materiales		
Hormigón		
$f_{ck} =$	45.00	N/mm ²
$\gamma_c =$	1.50	
$f_{cd} =$	30.00	N/mm ²
$f_{ctm} =$	2.90	N/mm ²
$E_c =$	31,928.43	N/mm ²
Acero		
$f_{yk} =$	500.00	N/mm ²
$\gamma_s =$	1.15	
$f_{yd} =$	434.78	N/mm ²
$E_s =$	200,000.00	N/mm ²
$n =$	6.26	

Tabla 14. Propiedades de los materiales utilizados.

Propiedad	Sección		Unidad
	Negativos	Positivos	
$A_s =$	6,300.0	4,320.0	mm ²
$A's =$	2,280.0	1,600.0	mm ²
$\rho =$	0.01800	0.01234	
$\rho' =$	0.00657	0.00457	
$v =$	207.1	195.0	mm
$v' =$	192.9	205.0	mm
$x/d =$	0.357	0.311	
$x =$	124.9	108.9	mm
$I_g =$	6.40E+09	6.01E+09	mm ⁴
$I_{cr} =$	2.73E+09	2.04E+09	mm ⁴
$M_{cr} =$	96.08	89.32	kNm
$I_{eff} =$	2.74E+09	2.05E+09	mm ⁴
$K_{eff} =$	87,341.05	65,501.39	kNm ²

Tabla 15. Propiedades mecánicas de las secciones calculadas.

El valor de la sobrecarga última que produciría el agotamiento de la estructura, cuando esta es aplicada a lo largo del vano central únicamente, se determina planteando las ecuaciones de equilibrio en dicho vano. Por lo tanto, en rotura, el equilibrio en el vano central se plantea a partir de la siguiente figura.



$$R_{23} = (G + Q) * \frac{L_2}{2}$$

Haciendo un corte justamente en el medio del vano central, es decir a $L_2/2$, y planteando el equilibrio rotacional en dicho punto se tiene:

$$M_{un} + M_{up} - R_{23} * \frac{L_2}{2} + (G + Q) \left(\frac{L_2}{2} \right) \left(\frac{L_2}{4} \right) = 0$$

De las anteriores dos expresiones se obtiene, como era de esperarse, que:

$$Q_u = \frac{8 * (M_{un} + M_{up})}{L_2^2} - G \quad (105)$$

Por lo tanto, la sobrecarga máxima que podría actuar sobre el vano central para lograr la distribución de momentos tal que el momento positivo en el centro del vano y los momentos negativos en de los apoyos sean igual a la capacidad última de las secciones críticas, tendría un valor de:

$$Q_u = \frac{8 * (854.84 + 600.87)}{(10)^2} - 1.25 * 20 = 89.46 \text{ kN/m}$$

La rigidez equivalente de la estructura se puede calcular con la expresión (55), que permite tomar en cuenta tres rigideces distintas. La tercera rigidez K_3 que se tomará en cuenta es la de la sección de la zona llegando al apoyo extremo que tiene mucho menos armadura que las zonas críticas.

$$K_{eq} = \frac{-K_1 K_2 K_3 (3\lambda + 1)}{K_1 K_2 (\beta + \xi - 1)^3 - K_1 K_3 \xi (3\beta^2 + 3\beta(\xi - 2) + \xi^2 - 3\xi + 3) - K_2 K_3 (\beta^3 - 3\beta^2 + 3\beta + 3\lambda)}$$

Tomando como valores $\beta = \frac{L_1}{L} = \frac{0}{6} = 0$; $\xi = \frac{L_2}{L} = \frac{4}{6} = 0.667$ y $\lambda = \frac{5}{6} = 0.833$.

$$K_{eq} = 69,805.87 \text{ kNm}^2$$

La demanda de rotación plástica sobre la rótula debido a la acción de la sobrecarga uniforme sobre el vano central, y también cuando la estructura es sometida a un gradiente térmico uniforme se puede calcular de la siguiente manera.

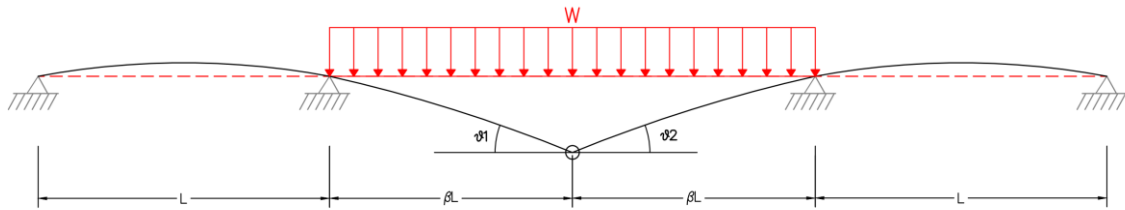


Figura 41. Rotación plástica en rótula central debido a la acción de la sobrecarga uniforme sobre el vano intermedio.

La rotación plástica de la rótula será igual a la suma de $\theta_1 + \theta_2$.

$$\theta_1 = \theta_2 = \frac{WL^3}{EI} * \left[\frac{\beta^2}{6} + \frac{\beta^3}{6} \right] \quad (106)$$

Por lo tanto, en el caso estudiado, donde $\beta = 5/6$, la demanda de rotación plástica debido a la demanda mecánica de la sobrecarga sería.

$$\theta_m^p = 2 * \frac{WL^3}{EI} * \left[\frac{\left(\frac{5}{6}\right)^2}{6} + \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^3}{6} \right] = \frac{275}{648} * \frac{WL^3}{EI}$$

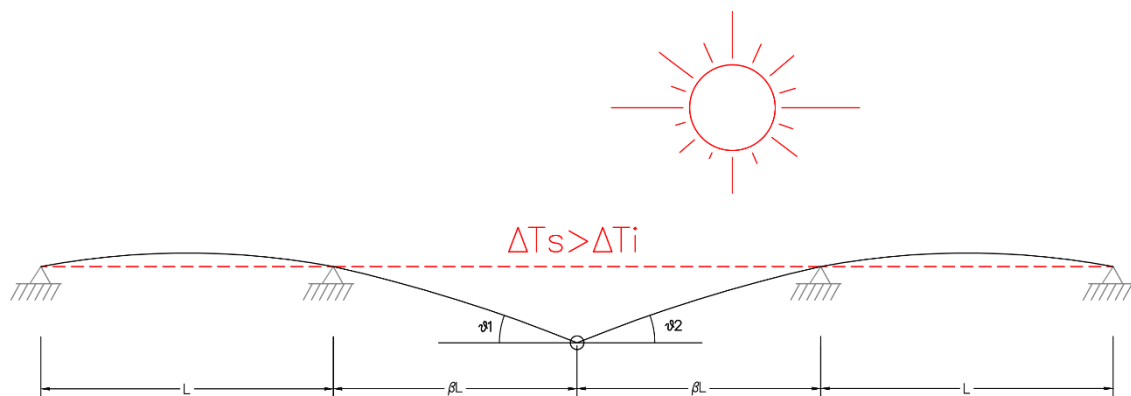


Figura 42. Rotación plástica de la rótula central debido a la acción del gradiente térmico de temperatura.

Para el caso del gradiente térmico de temperatura, la rotación plástica sobre la rótula es también igual a $\theta_1 + \theta_2$.

$$\theta_1 = \theta_2 = \frac{\alpha_{ct}(\Delta T_i - \Delta T_s)}{h} * \left[-\frac{L}{2} - \beta L \right] \quad (107)$$

Por lo que, para el caso estudiado, la demanda no mecánica de rotación plástica en la rótula debido al gradiente térmico es la siguiente:

$$\theta_{nm}^p = 2 * \frac{\alpha_{ct}(\Delta T_i - \Delta T_s)}{h} * \left[-\frac{6}{2} - \left(\frac{5}{6}\right)(6) \right] = -16 * \frac{\alpha_{ct}(\Delta T_i - \Delta T_s)}{h}$$

A continuación, se determina la rotación plástica admisible, que se considerará como la menor entre la rotación plástica que genere el mecanismo de colapso y la capacidad máxima de rotación plástica de la sección central del vano.

$$\theta_{colapso}^p = \frac{275}{648} * \frac{(Q_u - Q_{el})}{EI_{eq}} * L^3 = \frac{275}{648} * \frac{(89.46 - 75)}{69,805.87} * 6^3 = 0.01897 \text{ rad} \quad \Leftarrow$$

$$l_p = \sqrt{\frac{8 * (M_u - M_y)}{p_u}} = \sqrt{\frac{8 * (600.87 - 591.24)}{102}} = 0.8691 \text{ m} = 869.03 \text{ mm}$$

$$\theta_{max.sec}^p = \frac{2}{3} * (\varphi_u - \varphi_y) * l_p = \frac{2}{3} * (5.93 \times 10^{-5} - 9.02 \times 10^{-6}) * 869.03 = 0.02910 \text{ rad} \quad \times$$

La rotación plástica máxima admisible en la rótula corresponde a la que teóricamente produciría un mecanismo de colapso. La expresión para el cálculo del valor del exceso de sobrecarga de uso ΔQ , en función de la demanda no mecánica y la capacidad máxima admisible de rotación plástica, se presenta a continuación:

$$\Delta Q = \frac{648}{275} * \frac{EI_{eq}}{L^3} * (\theta^p - \theta^{nm}) = 761.52 * (0.01897 - \theta^{nm})$$

$$\Delta Q = 14.45 - 761.52 * \theta^{nm}$$

Para diferentes valores de gradiente térmico, la sobrecarga total que puede aplicarse sobre el vano central hasta que se produzca la falla última, se presentan en la siguiente tabla:

$\Delta T_i - \Delta T_s$	θ_{nm} (rad)	ΔQ (kN/m)	PROPUESTA		CONS		% Error
			$Q_u = (Q_{el} + \Delta Q)$	Q_u / Q_{uo}	Q_u (kN/m)	Q_u / Q_{uo}	
0.00	0.0000	14.45	89.45	1.00	90.71	1.00	1.39%
-10.00	0.0040	11.43	86.43	0.97	90.29	1.00	4.27%
-15.00	0.0059	9.93	84.93	0.95	89.67	0.99	5.29%
-20.00	0.0079	8.42	83.42	0.93	89.05	0.98	6.32%
-25.00	0.0099	6.91	81.91	0.92	88.00	0.97	6.92%
-30.00	0.0119	5.40	80.40	0.90	86.39	0.95	6.93%
-35.00	0.0139	3.89	78.89	0.88	84.37	0.93	6.49%
-40.00	0.0158	2.39	77.39	0.87	82.23	0.91	5.89%
-45.00	0.0178	0.88	75.88	0.85	83.20	0.92	8.80%

Figura 43. Resultados del análisis y comparación con el CONS (III).

Los resultados obtenidos por el procedimiento desarrollado representan adecuadamente los resultados provenientes del análisis no lineal con el CONS. Tal como se ha observado en los ejemplos anteriores, el error entre los resultados del método propuesto y los resultados del CONS, crece gradualmente según sea mayor el valor de la curvatura térmica. Además, la tendencia de decrecimiento es muy similar en ambos resultados, tal como se muestra en la siguiente figura:

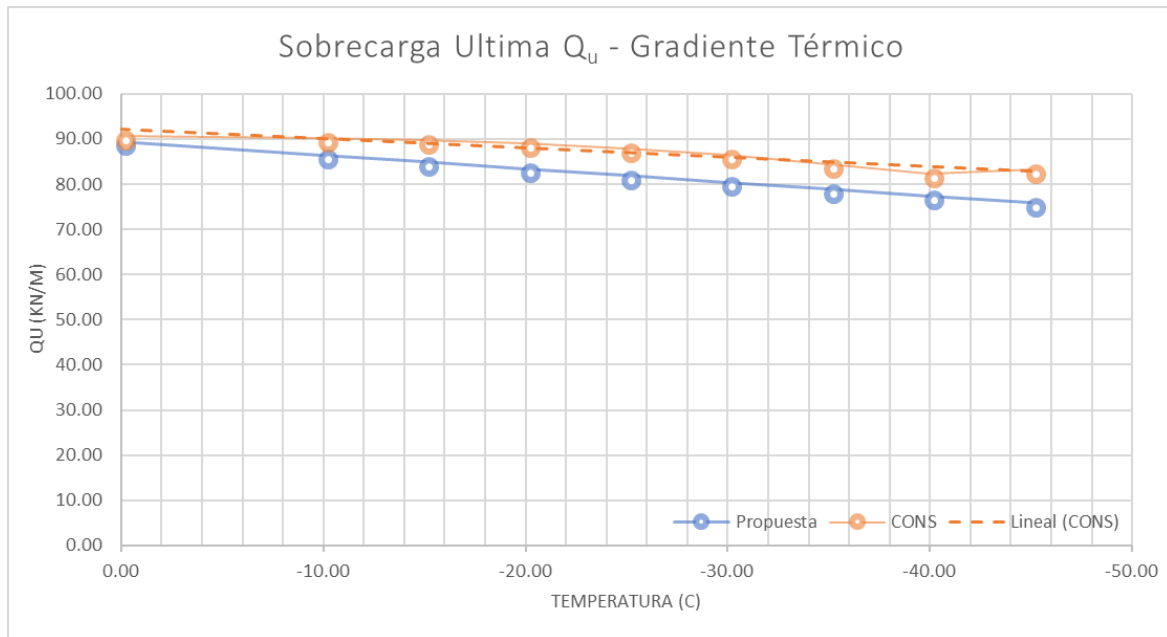


Figura 44. Comparación de resultados entre el método propuesto y CONS (III).

Otro punto importante que destacar es que, al menos haciendo referencia a este caso, aún con un valor de gradiente térmico que pudiera considerarse como poco realista (45°C), la estructura aún es capaz de soportar las cargas mayoradas en Estado Límite Último. Sin embargo, esto significa que la estructura perdería gran parte, sino toda, de su capacidad para redistribuir esfuerzos e incrementar los momentos negativos sobre los apoyos luego de haberse alcanzado el momento máximo positivo en el centro de vano.

3.2.4. Resumen general de la metodología para el análisis del efecto de las deformaciones impuestas en el estado límite último de la estructura

De manera general, la aplicación práctica de los conceptos desarrollados en este capítulo para la verificación de los efectos de las deformaciones impuestas en el estado límite último de las estructuras, requieren que se lleven a cabo los siguientes pasos:

- 1) Se deben obtener los diagramas momento-curvatura de las secciones críticas analizadas, donde se espera la formación de rótulas plásticas cuando se acerque el agotamiento. Conocer los puntos de plastificación y de agotamiento de cada sección es imprescindible para cuantificar la capacidad de rotación de la sección, y por tanto las propiedades de las rótulas plásticas.
- 2) Se debe conocer el mecanismo de colapso que produce la falla de la estructura y el orden en que se forman las rótulas plásticas. Generalmente, en estructuras continuas el mecanismo de colapso no debería ser complicado de identificar, y depende de la configuración de las cargas y de la resistencia de las diferentes secciones.
- 3) Determinar la demanda de rotación plástica en cada una de las rótulas hasta alcanzar el mecanismo de colapso. A medida que se van formando las rótulas, el esquema estructural de la estructura cambia, y la estructura se comporta como si se sustituyera la sección plastificada por una articulación sin fricción. Esto hace que el proceso de carga hasta el mecanismo de colapso se deba estudiar como una serie de etapas, en las cuales la carga se incrementa un

valor ΔW_i , debe poderse calcular la demanda de rotación plástica asociada al incremento de carga para cada nuevo esquema estructural.

Es posible encontrar casos en los que la demanda de rotación mecánica sobre alguna rótula supere su capacidad máxima de rotación de durante alguna etapa anterior a la formación del mecanismo de colapso esperado. En estos casos, la falla de la estructura se produce por el agotamiento de la rótula plástica, y no se llega a formar el mecanismo de colapso.

- 4) Luego, es necesario determinar la rotación plástica demandada por la deformación impuesta. Antes de que se forme el mecanismo de colapso, en la estructura deben haberse formado suficientes rótulas plásticas como para que la estructura tenga un esquema estructural estáticamente determinado o isostático. Las rotaciones producidas por las deformaciones impuestas se calculan en este estado, ya que la estructura en teoría se deformará libremente sin restricciones, consumiendo ductilidad de las secciones donde se han formado las rótulas.

En el desarrollo de este documento, se han presentado una serie de expresiones que permiten calcular las rotaciones plásticas demandadas por cargas o deformaciones impuestas para un esquema estructural específico. Estas expresiones fueron desarrolladas aplicando el método de la carga unitaria, que aplica el principio de los trabajos virtuales para calcular la deflexión o el giro producida por una carga o una curvatura de un punto específico de la estructura. Se puede utilizar este mismo método, o cualquier otro, para calcular las rotaciones que se producen en las rótulas plásticas.

En los casos comentados anteriormente, que el mecanismo de colapso no llega a formarse, cabe la posibilidad de tener que calcular las demandas no mecánicas en esquemas estructurales hiperestáticos.

- 5) Una vez que se hayan determinado las demandas de rotación plástica mecánica θ_m^p , y de rotación no mecánica θ_{nm}^p , en cada una de las rótulas, se obtiene lo que en este trabajo se ha definido como la rotación plástica efectiva θ^p . Luego, este valor de rotación efectiva se debe comparar con la capacidad

máxima de rotación de la sección, que ya ha sido determinada en el primer paso del procedimiento.

Si se determina la rotación plástica efectiva de cada rótula es mayor que su capacidad máxima de rotación, entonces las deformaciones impuestas sí afectarán negativamente la capacidad máxima de la estructura, y se reducirá la reserva de resistencia de la estructura. Inclusive puede que, debido al efecto de la deformación impuesta, no se llegue a formar el mecanismo de colapso.

En el caso de que las secciones de la estructura sean lo suficientemente dúctiles, es decir, que tengan capacidad máxima suficiente como para asumir la rotación plástica efectiva, la deformación impuesta no afectará la carga última ni la reserva de resistencia de la estructura; pues las rótulas aún tendrán capacidad de alcanzar el mecanismo de colapso. Es entonces cuando el efecto de las deformaciones impuestas puede ignorarse.

Explicado esto, se espera que se haya podido establecer los criterios y un procedimiento cualitativo que permita determinar de manera sistemática los casos en los cuales no sea razonable ignorar el efecto de las deformaciones impuestas y en cuales efectivamente sí es seguro no tomarlas en consideración en el diseño.

4. Propuesta de metodología de verificación del estado límite de fisuración

4.1. Introducción al cálculo en servicio frente a deformaciones impuestas

Tal como se ha comentado anteriormente, en estructuras estáticamente indeterminadas, las deformaciones impuestas generan esfuerzos que dependen de la rigidez de los miembros que componen la estructura. Si debido al efecto de las acciones directas y de las deformaciones impuestas se produce fisuración, la rigidez automáticamente decrece, y por consiguiente también disminuye considerablemente el ancho de fisura. Es importante recordar que en lo que al comportamiento estructural se refiere, la respuesta frente a deformaciones impuestas en términos de esfuerzos resultantes, depende directamente de la rigidez del elemento estructural, la cual disminuye considerablemente cuando el elemento se fisura.[15]

La evaluación de los efectos de las deformaciones impuestas a través del análisis lineal convencional, además de conducir a graves errores en la evaluación de la fiabilidad estructural en estado límite último, también produce resultados cuestionables en el dominio del comportamiento en servicio.[16]

El objetivo de esta sección del proyecto es contribuir a la verificación del estado límite de fisuración frente a cargas y deformaciones impuestas producidas por variaciones térmicas, descensos de apoyos o por retracción. Se tratará de simplificar el proceso y tener en cuenta los efectos de la fisuración en el propio ancho de fisura.

4.2. Caracterización de las acciones indirectas

Las deformaciones impuestas sobre las estructuras son originadas más comúnmente por:

- Gradientes térmicos: donde un miembro percibe variaciones de temperatura distintas en dos caras opuestas, produciéndose así una curvatura impuesta.
- Retracción: la cual puede ser diferencial entre la cara superior e inferior debido a la diferencia de intercambio hidráulico con el ambiente o existencia de cuantías de armadura muy distintas en ambas caras.
- Descensos de apoyo: que debido a la naturaleza estáticamente indeterminada de la estructura produce esfuerzos que serán proporcionales al desplazamiento impuesto.

Por lo general, de cara a la flexión de la estructura, lo que despierta interés es la curvatura generada por estos fenómenos. Cabe destacar que la dilatación/contracción media, es un fenómeno que afecta a los pilares produciendo desplazamientos relativos laterales entre sus extremos superior e inferior, y este no es un aspecto que sea objetivo del presente estudio.

La curvatura impuesta por un gradiente de deformación en una sección se define en cada caso de la siguiente manera:

- Gradiente térmico: $C_t = \frac{\alpha_{ct}(\Delta T_s - \Delta T_i)}{h}$
- Retracción: $C_r = \frac{\varepsilon_{rs} - \varepsilon_{ri}}{h}$
- Descenso de apoyos en estructuras continuas: dependerá del esquema y geometría estructural. En el caso de una viga de dos vanos, por ejemplo:

- Descenso δ del apoyo central: $C_{\delta(x)} = \frac{3\delta}{L^3}x$
- Descenso δ de un apoyo extremo: $C_{\delta(x)} = \frac{3\delta}{2L^3}x$

4.3. Verificación del estado límite de fisuración. Control del ancho de fisura.

Tal como se trató en el estado del conocimiento de este trabajo, el método para el cálculo del ancho de fisura establecido en la normativa española EHE-08 se basa en el siguiente planteamiento básico.

$$w_k \leq \beta w_{med}$$

Donde,

$\beta = 1.3$, para el caso de acciones indirectas actuando únicamente.

$\beta = 1.7$, para todos los demás casos.

Los valores de estos coeficientes permiten así reflejar el hecho experimentalmente comprobado de que, en el caso de las acciones indirectas, la dispersión de los valores es inferior a los demás casos.

El ancho medio de fisura se calcula como el producto de la separación media entre fisuras s_m y la deformación media de armadura ε_{sm} , teniendo en cuenta la contribución del hormigón entre fisuras.

$$w_{med} = s_m * \varepsilon_{sm} \quad (108)$$

Tal como se había presentado anteriormente en este trabajo, la separación media de fisuras y la deformación media de la armadura se calculan con las expresiones:

$$s_m = 2c + 0.2s + 0.4k_1 \frac{A_{ceficaz} * \phi}{A_s}$$

$$\varepsilon_{sm} = \frac{\sigma_s}{E_s} \left(1 - k_2 * \left(\frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s} \right)^2 \right) \geq 0.4 \frac{\sigma_s}{E_s}$$

Donde,

C es el recubrimiento de las armaduras.

S es la distancia entre barras.

K₁ es un coeficiente que toma en cuenta la influencia del diagrama de tracciones.

K₂ es un coeficiente que depende del estado de tensiones aplicado (0.125 flexión simple, 0.125-0.250 flexión compuesta y 0.250 tracción simple).

4.4. Cálculo del momento flector debido a la deformación impuesta

En general, al introducirse una curvatura impuesta, se genera un momento hiperestático que vale:

$$M_i = \eta_i * k_{eff} * C_i \quad (109)$$

Donde C_i es el valor de la curvatura, η_i es el factor que relaciona el valor de la curvatura con el momento y que depende del tipo de acción y del esquema estructural. En la siguiente figura se muestra un ejemplo.

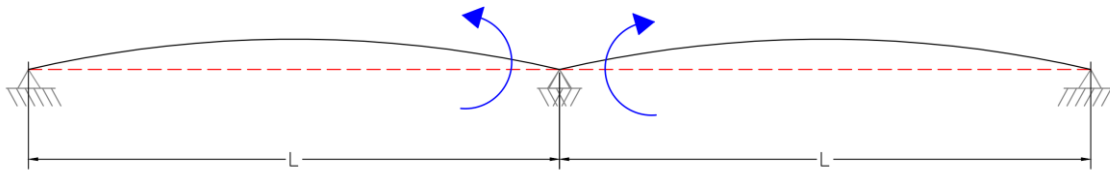


Figura 45. Ejemplo de viga de dos vanos sometida a una curvatura impuesta.

El giro, y por consiguiente, el momento que se produce en el apoyo central debido a la curvatura impuesta sería:

$$\theta = -\frac{C_i * L}{2} + \frac{M_i L}{3k_{eff}} \quad \rightarrow \quad M_i = \frac{3}{2} * k_{eff} * C_i$$

Para estructuras continuas con mayor número de vanos de igual longitud y sometidas a una curvatura uniforme sobre toda la longitud (tal como un gradiente térmico o efecto de la retracción), los valores de η_i para los momentos sobre cada uno de los apoyos se recogen en la siguiente tabla que ha sido desarrollada para dichos fines.

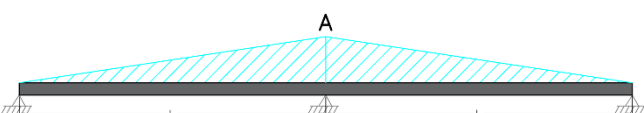
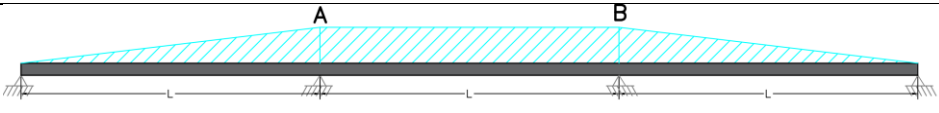
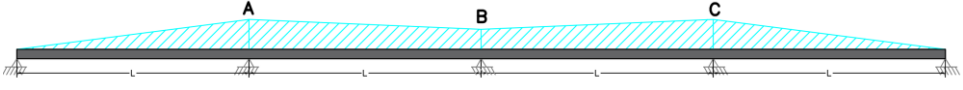
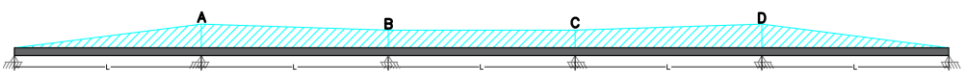
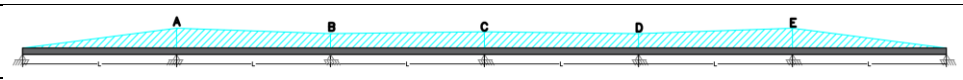
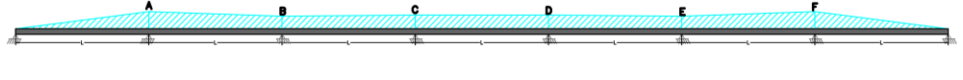
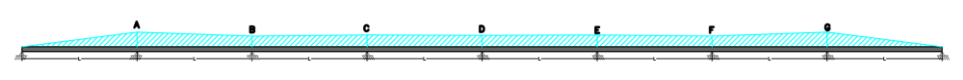
Caso	Coeficiente η_i						
	A	B	C	D	E	F	G
	$\frac{3}{2}$	-	-	-	-	-	-
	$\frac{6}{5}$	$\frac{6}{5}$	-	-	-	-	-
	$\frac{9}{7}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{9}{7}$	-	-	-	-
	$\frac{24}{19}$	$\frac{18}{19}$	$\frac{18}{19}$	$\frac{24}{19}$	-	-	-
	$\frac{33}{26}$	$\frac{12}{13}$	$\frac{27}{26}$	$\frac{12}{13}$	$\frac{33}{26}$	-	-
	$\frac{90}{71}$	$\frac{66}{71}$	$\frac{72}{71}$	$\frac{72}{71}$	$\frac{66}{71}$	$\frac{90}{71}$	-
	$\frac{123}{97}$	$\frac{90}{97}$	$\frac{99}{97}$	$\frac{96}{97}$	$\frac{99}{97}$	$\frac{90}{97}$	$\frac{123}{97}$

Tabla 16. Valores del coeficiente η_i para estructuras continuas sometidas a una curvatura uniforme sobre toda su longitud.

El signo del momento representado en la tabla (momento negativo) corresponde a una curvatura de signo positivo, es decir, una curvatura en la que se produce un acortamiento en la cara superior y un alargamiento en la cara inferior de la estructura. En caso de una curvatura de signo opuesta, obviamente, el signo del momento sería el contrario, de igual forma.

Se ha podido observar que a medida que incrementa el número de vanos, los valores de η_i se estabilizan, tal como se muestra en el gráfico a continuación.

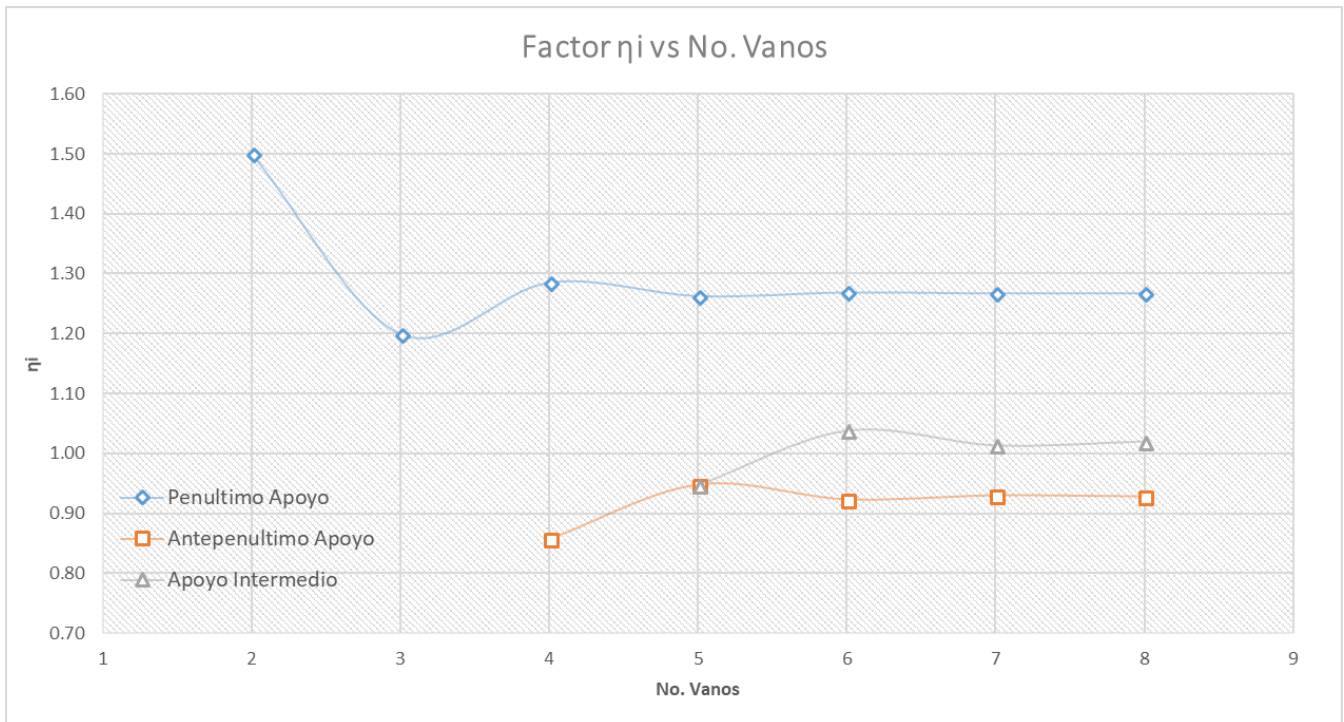


Figura 46. Variación del factor η_i en función del número de vanos.

Gracias a este efecto de estabilización parece seguro recomendar, para el caso de estructuras continuas de más de 8 vanos sometidas a curvaturas uniformes impuestas, los siguientes valores de η_i :

- Sobre los apoyos adyacentes inmediatos a los extremos, es decir, segundo y penúltimo apoyo, donde se produce el momento máximo: $\eta_i = 1.27$
- Sobre el tercer y antepenúltimo apoyo: $\eta_i = 0.93$
- Sobre los demás apoyos intermedios: $\eta_i = 1.03$

Es importante recordar que estos valores recomendados son válidos cuando todos los vanos tienen igual longitud, de lo contrario, un análisis estructural más detallado se requiere para calcular los esfuerzos que se producen debido al efecto de la curvatura impuesta, y luego el coeficiente η_i .

Por otro lado, para los casos en los que la deformación impuesta sea un descenso de apoyo, lo más práctico sería también calcular los esfuerzos que genera dicha acción analizando la estructura y luego el coeficiente η_i nuevamente.

Debido a que los esfuerzos originados por las deformaciones impuestas dependen de manera directa de la rigidez de la estructura, se obtendrían resultados irreales en el caso de que se hiciera la verificación en estado límite de servicio con los valores de los esfuerzos provenientes de un análisis elástico. La realidad es que los esfuerzos que se producirían como efecto de la deformación impuesta serían una fracción $\xi = \frac{M_i}{M_i^{elast}}$, que sería menor que la unidad, del valor extraído del análisis elástico directamente. Trabajos previos se han desarrollado en el cual se estiman el valor de ξ en función de la cuantía de armadura a flexión ρ , el nivel de las cargas verticales permanentes y del tiempo en el cual se produce la deformación impuesta.[15]

Por esta razón es que se hace necesario el cálculo de una rigidez eficaz que permita cuantificar correctamente el valor de las tensiones y deformaciones en la armadura traccionada debidas al efecto de la deformación impuesta.

La rigidez eficaz por considerar, la cual toma en cuenta la aportación del hormigón a tracción entre fisuras, ha sido determinada a través del método de interpolación bilinear para el cálculo de las deflexiones instantáneas propuesto por el Código Modelo 2010.[17]

$$(I)_{eff} = \frac{(I)_I \cdot (I)_{II}}{\zeta \cdot (I)_I + (1 - \zeta) \cdot (I)_{II}} \quad (110)$$

Siendo,

$(I)_I = \frac{bh^3}{12}$, es la inercia de la sección bruta sin fisurar.

$(I)_{II} = bd^3n\rho\left(1 - \frac{x}{d}\right)\left(1 - \frac{x}{3d}\right)$, es la inercia fisurada de la sección.

La profundidad relativa del eje neutro x/d se puede calcular de la siguiente manera, ignorando el aporte del hormigón traccionado.

$$\frac{x}{d} = n\rho \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2}{n\rho}} \right) \cong 0.75(n\rho)^{1/3} \quad (111)$$

El factor de interpolación depende del tipo de carga y el nivel de fisuración, permite considerar el efecto del "tension stiffening" en el cálculo.

$$\zeta = 1 - \beta \left(\frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s} \right)^2 \quad (112)$$

En esta expresión β es el factor que toma en cuenta el tipo de carga y la influencia de su duración. Se considera $\beta=0.5$ para cargas repetitivas o sostenidas.

Si se considera un parámetro nombrado K_r como el cociente entre la inercia efectiva I_{eff} calculada con la expresión (110) y el producto bd^3 , así como también se asume un canto útil $d=0.9h$, se puede observar cómo en la siguiente gráfica se puede ajustar con una línea recta la relación K_r versus np , mostrando prácticamente independencia con respecto a la tensión en la armadura σ_s .

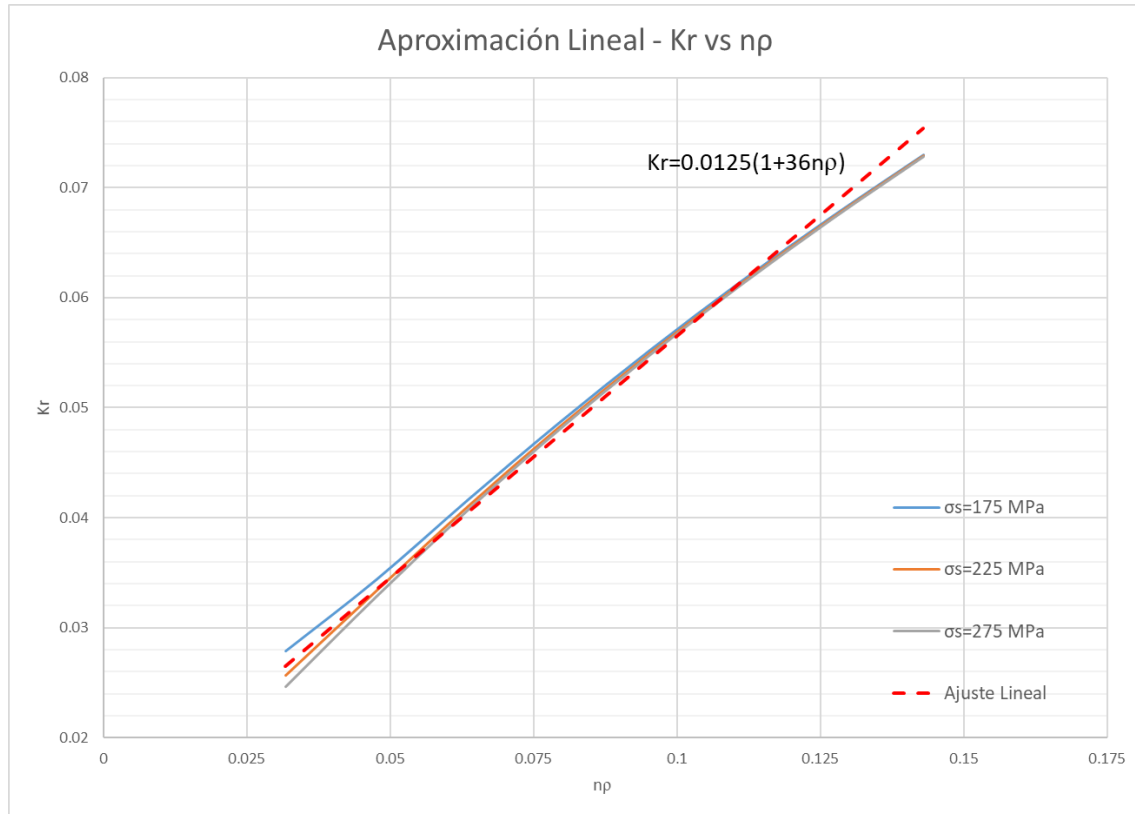


Figura 47. Ajuste de línea recta del parámetro K_r en función de np .

Una vez planteada esta aproximación lineal, la rigidez fisurada efectiva, tomando en cuenta el hormigón a tracción entre fisuras, se puede calcular con la expresión:

$$(I)_{eff} = K_r * bd^3 = 0.0125(1 + 36np)bd^3 \quad (113)$$

$$k_{eff} = 0.0125(1 + 36np)bd^3 E_c \quad (114)$$

Cabe destacar que este valor de rigidez eficaz corresponde a nivel de una sección específica, por lo que habría que calcular un valor de rigidez eficaz equivalente para la estructura.

Por consiguiente, el momento total debido a la acción de cargas y a deformaciones impuestas sería:

$$M = M_p + M_i = \eta_p * P * L^2 + \eta_i * C_i * k_{eff}$$

Y la tensión y el alargamiento en la armadura pueden aproximarse como:

$$\sigma_s = \frac{M}{A_s * z} \quad ; \quad \varepsilon_s = \frac{\sigma_s}{E_s} = \frac{M}{A_s * z * E_s}$$

La problemática principal con el desarrollo de una metodología de dimensionamiento de armadura en estado límite de servicio se encuentra en que k_{eff} , ε_{sm} y s_m dependen de la cuantía de armadura ρ . Esto conlleva a que sería necesario hacer un proceso iterativo, o resolver alguna ecuación de considerable complejidad.

A nivel de comprobación, un aspecto que podría complicar considerablemente el desarrollo de una expresión sería el término correspondiente al "tension stiffening", el cual depende de $\left(\frac{M_{cr}}{M}\right)$, y el momento M depende entonces de A_s por medio de la rigidez fisurada. La simplificación que se plantea es igualar dicho término a cero, por lo que la expresión del ancho medio de fisura quedaría como:

$$w_m \cong \frac{\eta_p * P * L^2 + \eta_i * C_i * K_{eff}}{E_s * A_s * z} * \left(2c + 0.2s + 0.05 * \frac{A_{ce} * \phi}{A_s}\right) \quad (115)$$

4.5. Desarrollo de ecuación adimensional y gráficos para determinar el ancho de fisura.

El objetivo de esta sección es el desarrollo de una ecuación dimensional que permita estimar de manera ágil y práctica el ancho de fisura característico por el efecto de las acciones de cargas y deformaciones impuestas sobre una estructura continua.

Primeramente, se han de tomar ciertas consideraciones generales de partida, las cuales se presentan a continuación:

$$c \cong 0.10d \quad ; \quad s = \frac{b}{n_{bar}} \quad ; \quad A_{ce} \cong b * 7.5 * \phi \quad ; \quad A_s = n_b * \frac{\pi \phi^2}{4}$$

$$A_s = \rho b d \quad ; \quad z = 0.9d \quad ; \quad E_s = n E_c$$

Con estas suposiciones, la separación media entre fisuras s_m se simplifica bastante y quedaría solo en función del canto útil, el ancho de la sección y la cantidad de barras traccionadas.

$$s_m = \left(2c + 0.2s + 0.05 * \frac{A_{ce} * \phi}{A_s} \right) = 0.2d + 0.2 * \frac{b}{n_{bar}} + 0.05 * \frac{7.5 * b * \phi^2 * 4}{n_b * \pi * \phi^2}$$

$$s_m = 0.2d + 0.7 \frac{b}{n_b}$$

Volviendo a la fórmula para calcular el ancho de fisura medio, dividiendo ambos lados de la igualdad por el canto útil d , dicha expresión se vuelve adimensional. Si se sustituye la expresión original de s_m por la que justo se ha presentado, y se multiplican los momentos M_p y M_i , por sus factores β_p y β_i correspondientes, se consigue esta expresión adimensional del ancho de fisura característico.

$$\frac{w_k}{d} = \frac{\left(0.2d + 0.7 \frac{b}{n_b} \right)}{d} \cdot \left[\frac{\beta_p \cdot M_p + \beta_i \cdot M_i}{E_s \cdot A_s \cdot z} \right] \quad ; \quad \beta_p = 1.7 \quad \beta_i = 1.3$$

Tomando en cuenta que: $s = \frac{b}{n_b}$; $E_s = n E_c$; $A_s = \rho b d$; $z = 0.9d$; $\frac{h}{d} = 1.10$

$$M_{cr} = \frac{bh^2}{6} * f_{ct} = \frac{bd^2}{6} * \left(\frac{h}{d} \right)^2 * f_{ct} = 0.20bd^2 f_{ct}$$

Por otro lado, también se considera un término llamado $\lambda_p = \frac{M_p}{M_{cr}}$, siendo este la relación entre el momento que soporta la sección en servicio y el momento de fisuración. Finalmente, con todas las consideraciones incluidas, se obtiene la siguiente expresión adimensional, que va a depender de la cuantía de armadura, el canto útil, el factor λ_p , la relación modular n , el tipo de hormigón y de la curvatura impuesta.

$$\frac{w_k}{d} = \left[0.2 + 0.7 \frac{s}{d} \right] \cdot \left[\frac{\beta_p * \lambda_p * 0.2bd^2 f_{ct}}{n E_c * \rho b d * 0.9d} + \frac{\beta_i \eta_i C_i * E_c b d^3 0.0125(1 + 36n\rho)}{n E_c * \rho b d * 0.9d} \right]$$

$$\frac{w_k}{d} = \left[0.2 + 0.7 \frac{s}{d} \right] \cdot \left[\frac{2}{9} \cdot \frac{\beta_p * \lambda_p}{n \rho} \left(\frac{f_{ct}}{E_c} \right) + \frac{1}{72} \cdot \frac{\beta_i \eta_i (C_i d)}{n \rho} \cdot (1 + 36n\rho) \right] \quad (116)$$

Si se fijan los valores de λ_p y η_i es posible elaborar una serie de gráficos donde se represente la relación del ancho fisura relativo al canto útil $\frac{w_k}{d}$ en función de n_p , para diferentes valores de curvaturas impuestas $C_i d$. En la siguiente figura se muestra un ejemplo de un gráfico como el antes descrito, el cual corresponde a valores de $\lambda_p=1.5$ y $\eta_i=1.5$.

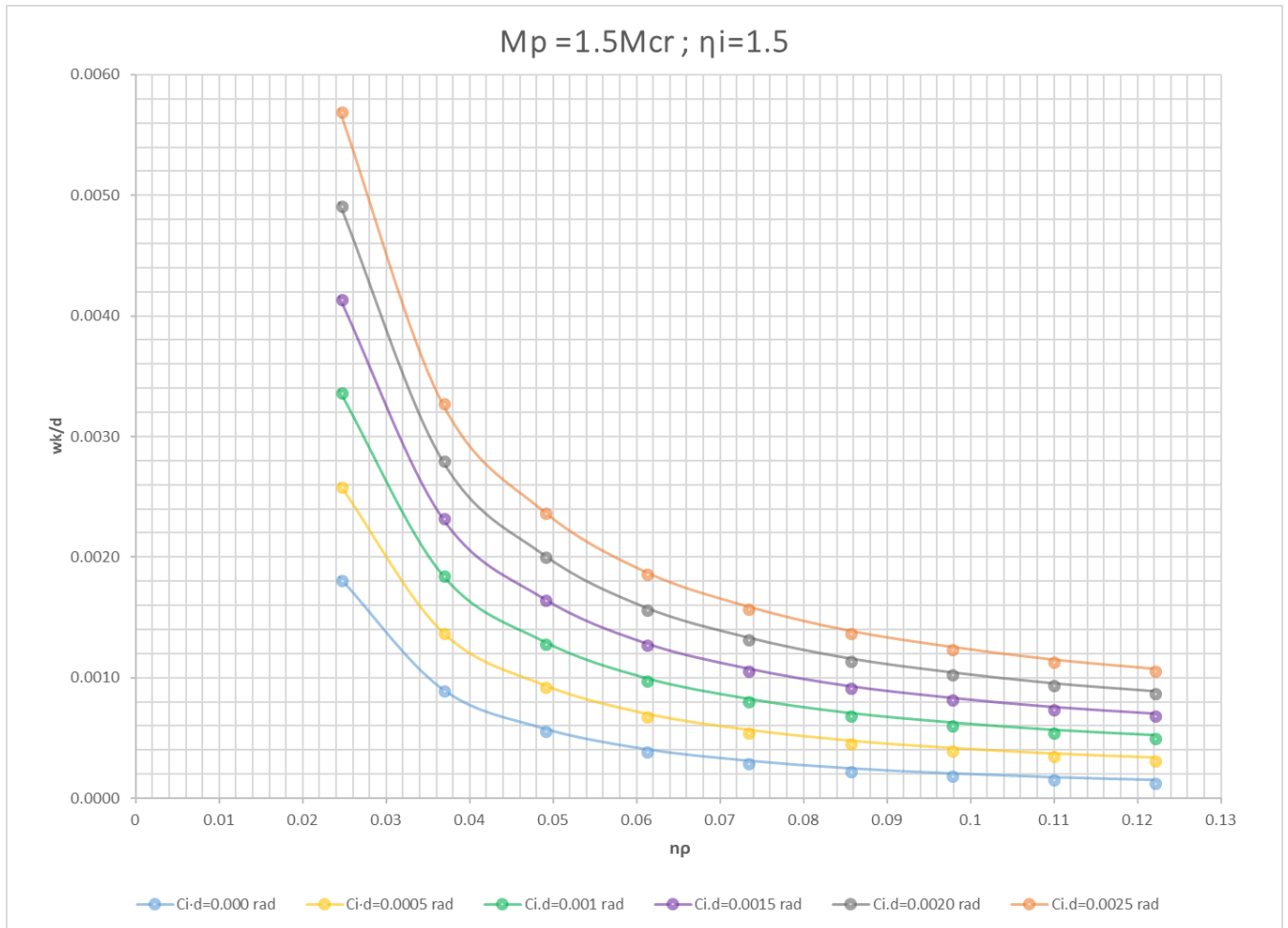


Figura 48. Gráfico ejemplo para estimar el ancho característico de fisura para los parámetros $\lambda_p=1.5$ y $\eta_i=1.5$

Otra serie de gráficos para diferentes valores de los parámetros λ_p y η_i se incluirán como anexos al final de este documento para que pueda ser utilizados en otros casos.

5. Ejemplo práctico de aplicación de los conceptos estudiados

5.1. Introducción y planteamiento del problema

En este capítulo se desarrollará un ejemplo práctico, el cual consistirá en el dimensionamiento de la armadura a flexión de un tablero tipo losa de un puente de carretera, sometido tanto a cargas como a deformaciones impuestas de temperatura. La losa tiene un ancho total de 10.6 metros y un canto total de 1 metro, tal como se muestra en la figura, junto con sus demás dimensiones.

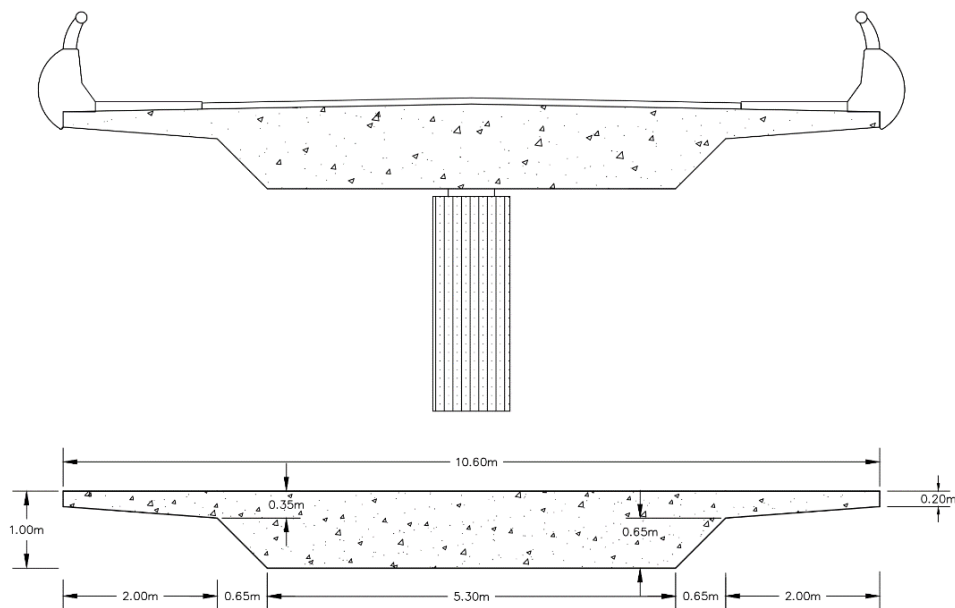


Figura 49. Tablero de puente tipo losa de hormigón armado.

El esquema longitudinal consta de 4 vanos, con longitudes de 14 y 18 metros los vanos extremos e interiores respectivamente. La longitud del puente es de entonces 64 metros en total, y pasa por encima de una zona baja donde se prevé la construcción futura de una carretera.

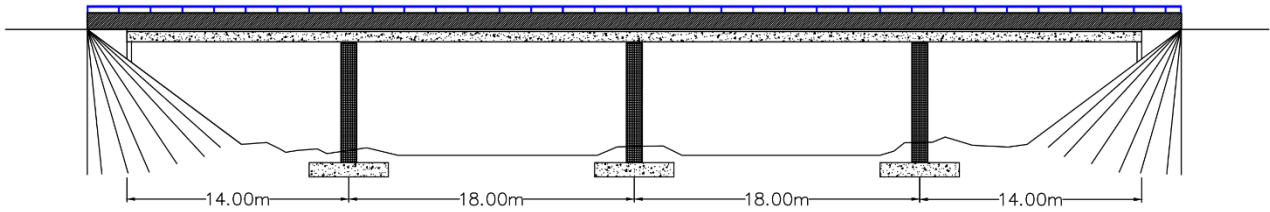


Figura 50. Alzado longitudinal del puente de 64 metros longitud, con luces de 14m y 18m.

Las propiedades mecánicas de la sección se muestran a continuación en una tabla.

Propiedades de la Sección		
$A_c=$	7.28E+06	mm ²
$I_g=$	6.20E+11	mm ⁴
$v'_{(bottom)}=$	571.00	mm
$v_{(top)}=$	429.00	mm
$M_{cr}(+)=$	3,145.03	kNm
$M_{cr}(-)=$	4,186.04	kNm

Tabla 18. Propiedades de la sección losa del tablero.

Los materiales considerados han sido hormigón tipo HA-30/B/20/IIIa y armadura de acero con características especiales de ductilidad B-500SD. El tipo de exposición ambiental se consideró como IIIa, al tratarse de elementos estructurales situados a menos de 5km de la línea costera. Las propiedades de dichos materiales se muestran en el cuadro a continuación:

Propiedades de los Materiales		
Hormigón		
$f_{ck}=$	30.0	N/mm ²
$\gamma_c=$	1.5	
$f_{cd}=$	20.0	N/mm ²
$E_c=$	28,576.79	N/mm ²
$f_{ctm}=$	2.90	N/mm ²
Armadura de Acero		
$f_{yk}=$	500.00	N/mm ²
$\gamma_s=$	1.15	
$f_{yd}=$	434.78	N/mm ²
$E_s=$	200,000.00	N/mm ²
$n=$	7.00	

Tabla 19. Propiedades de los materiales considerados en el ejemplo.

5.2. Cargas consideradas

Las cargas de diseño y sus respectivas combinaciones han sido consideradas según se establece en la Instrucción sobre las acciones a considerar en el proyecto de puentes de carretera IAP-11.[18]

El número de carriles virtuales sobre el tablero se han definido como el número entero en el cociente del ancho útil y 3 metros de ancho por carril.

El ancho útil de la parte superior del tablero es el ancho total de 10.6 metros menos 0.60m ocupados por ambas barandas a cada lado del tablero. El número de carriles es, por tanto, $w = \text{entero} \left(\frac{w}{3} \right) = 3 \text{ carriles}$, dejando pues un área remanente de 10 metros.

El peso propio se ha considerado con el peso específico del hormigón armado de 25 kN/m³. La carga uniforme correspondiente al peso propio es entonces:

$$W_{pp} = A_c * \gamma_c = 7.28m^2 \times 25 \frac{kN}{m^3} = 182 \text{ kN/m}$$

Por otro lado, las cargas muertas consideradas corresponden al peso de una capa de 8cm de pavimento, más el peso de las barandas a ambos lados del tablero.

$$W_{cm} = 0.08m \times 24 \frac{kN}{m^3} \times 10m + 7 \frac{kN}{m} \times 2 = 33.2 \text{ kN/m}$$

En cuanto a las sobrecargas de uso y tráfico, se han cargado los carriles de la siguiente manera, tal como se indica en la normativa:

Carril	Vehículo Pesado	Sobrecarga Uniforme
1	2 x 300 kN (@1.20m)	9 kN/m ²
2	2 x 200 kN (@1.20m)	2.5 kN/m ²
3	2 x 100 kN (@1.20m)	2.5 kN/m ²
Área Remanente	0	2.5 kN/m ²

Tabla 20. Valores y configuración de la sobre carga de tráfico y vehículo pesado.

Por lo tanto, longitudinalmente, la sobrecarga de tráfico constará de dos ejes representados por cargas puntuales separadas a 1.20m de 600kN, más un total de 44.5 kN/m de sobrecarga uniforme sobre la longitud del tablero.

El gradiente térmico considerado actuando sobre la estructura ha sido también el que se define en la normativa. Para los gradientes donde la fibra superior de la losa se encuentra más caliente, la diferencia de temperatura es de 15°C, mientras que para el caso en el que la fibra superior se encuentra más fría la diferencia de temperatura que se debe considerar es 8°C.

5.3. Combinaciones de carga, coeficientes de seguridad y coeficientes de simultaneidad

Las combinaciones de cargas llevadas a cabo con las acciones detalladas en el acápite anterior han sido la combinación persistente o transitoria para la comprobación del estado límite último, y las combinaciones: característica, frecuente y cuasipermanente; para el estado límite de servicio. Estas combinaciones de acciones se expresan en la siguiente manera.

- Estado Límite Último:

- Combinación Persistente o Transitoria:

$$\sum_{j \geq 1} \gamma_{G,j} G_{k,j} + \sum_{m \geq 1} \gamma_{G,m} G_{k,m}^* + \gamma_{Q,1} Q_{k,1} + \sum_{i \geq 1} \gamma_{Q,i} \psi_{0,i} Q_{k,i}$$

- Estado Límite de Servicio:

- Combinación Característica:

$$\sum_{j \geq 1} \gamma_{G,j} G_{k,j} + \sum_{m \geq 1} \gamma_{G,m} G_{k,m}^* + \gamma_{Q,1} Q_{k,1} + \sum_{i \geq 1} \gamma_{Q,i} \psi_{0,i} Q_{k,i}$$

- Combinación Frecuente:

$$\sum_{j \geq 1} \gamma_{G,j} G_{k,j} + \sum_{m \geq 1} \gamma_{G,m} G_{k,m}^* + \gamma_{Q,1} \psi_{1,1} Q_{k,1} + \sum_{i > 1} \gamma_{Q,i} \psi_{2,i} Q_{k,i}$$

- Combinación Cuasi-permanente:

$$\sum_{j \geq 1} \gamma_{G,j} G_{k,j} + \sum_{m \geq 1} \gamma_{G,m} G_{k,m}^* + \sum_{i > 1} \gamma_{Q,i} \psi_{2,i} Q_{k,i}$$

La combinación persistente y la característica coinciden en forma, pero se aplican diferentes coeficientes de seguridad sobre las cargas.

Los coeficientes de seguridad utilizados se recopilan en la tabla a continuación:

Acción	ELU (γ_f)	ELS (γ_f)
Peso Propio	1.35	1.0
Carga Muerta	1.35	1.0
Sobrecarga de Uso	1.35	1.0
Acción climática (Térmica)	1.5	1.0

Tabla 21. Coeficientes de seguridad de las acciones para la comprobación en los estados límites últimos.

Así mismo, los coeficientes de simultaneidad para los valores de combinación de las acciones variables son los siguientes:

Acción Variable	ψ_0	ψ_1	ψ_2
Vehículo Pesado	0.75	0.75	0.0
Sobrecarga tráfico	0.40	0.40	0.0
Acción térmica	0.60	0.60	0.50

Tabla 22. Coeficientes de simultaneidad para los valores de combinación de las acciones variables.

5.4. Envoltentes de esfuerzos en las diferentes combinaciones de esfuerzos

Por la simetría de la estructura, se han tomado solo cuatro secciones críticas, correspondientes a dos secciones de momento positivo en el interior de los vanos, la sección de momento negativo en el segundo apoyo (equivalente a la sección del cuarto apoyo) y por último, la sección de momento negativo en el apoyo central.

Para este primer análisis se realizó un análisis lineal elástico con ayuda de SAP2000 para determinar las envolventes de esfuerzos para cada combinación de cargas considerada. En la siguiente figura se muestra un ejemplo de la envolvente para la combinación en el estado límite último.

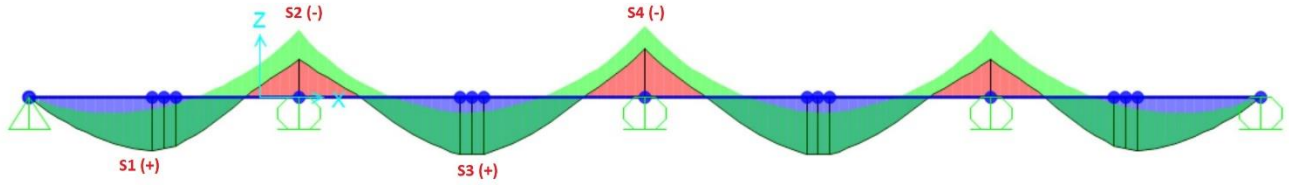


Figura 51. Envolvente de momentos flectores para la combinación de estado límite último.

Los momentos flectores máximos para cada una de las secciones señaladas en la anterior ilustración se presentan en la siguiente tabla para cada una de las combinaciones de carga.

Combinación	Momentos Flectores (kNm) Sección			
	S1 (+)	S2 (-)	S3 (+)	S4 (-)
ELU	9,201.39	-11,652.10	9,926.95	-12,335.40
ELS (K)	7,157.01	-8,975.69	8,157.02	-9,231.97
ELS (FR)	5,936.02	-7,955.49	6,776.34	-8,205.99
ELS (QP)	3,269.46	-6,086.03	3,869.35	-6,341.63

Figura 52. Momentos flectores máximos en secciones críticas para cada una de las combinaciones de acciones.

5.5. Dimensionamiento tradicional de las armaduras y comprobación de la fisuración

En esta primera propuesta de armado, se lleva a cabo el procedimiento habitual para el dimensionamiento de las armaduras, basado únicamente en la ley de esfuerzos obtenida en el análisis elástico. Debido a la similitud entre sus esfuerzos máximos, las armaduras en la sección S2 se dimensionaron de manera que coincidieran con las armaduras de la sección S4, es decir, que todas las secciones en negativos estarán igualmente armadas. Todas las secciones se calcularon una armadura mínima a compresión de $5,460 \text{ mm}^2$. Los datos del dimensionamiento de cada sección, así como también los cálculos de la rigidez fisurada y efectiva de cada sección se recogen en la tabla a continuación.

Sección	S1 (+)	S2 (-)	S3 (+)	S4 (-)	
h=	1,000.00	1,000.00	1,000.00	1,000.00	mm
b=	10,600.00	5,950.00	10,600.00	5,950.00	mm
bo=	5,950.00	10,600.00	5,950.00	10,600.00	mm
d=	950.00	950.00	950.00	950.00	mm
d'=	50.00	50.00	50.00	50.00	mm
M_d=	9,201.39	12,335.40	9,926.95	12,335.40	kNm
U_o=	2.01E+08	1.13E+08	2.01E+08	1.13E+08	N
M_{lim}=	71,748.75	40,274.06	71,748.75	40,274.06	kNm
As_{min_geom}=	13,389.68	13,389.68	13,389.68	13,389.68	mm ²
U_{s1}=	9.93E+06	1.38E+07	1.07E+07	1.38E+07	N
As_{1(teorico)}=	22,840.15	31,810.52	24,691.76	31,810.52	mm ²
Φ=	20.00	16.00	20.00	16.00	mm
Ab=	314.16	201.06	314.16	201.06	mm ²
nb=	73.00	159.00	79.00	159.00	barras
s=	80.41	66.25	74.38	66.25	mm
As_{1(real)}=	22,933.63	31,968.85	24,818.58	31,968.85	mm ²
%dif=	0.41%	0.50%	0.51%	0.50%	
ρ₁=	0.00228	0.00566	0.00246	0.00566	
As₂=	5,460.00	5,460.00	5,460.00	5,460.00	mm ²
ρ₂=	0.00054	0.00097	0.00054	0.00097	
x/d=	0.161	0.240	0.167	0.240	
x=	152.96	228.05	158.60	228.05	mm
I_{cr}=	1.15E+11	1.41E+11	1.23E+11	1.41E+11	mm ⁴
I_{eff}=	1.35E+11	1.60E+11	1.39E+11	1.60E+11	mm ⁴
k_{eff}=	3.86E+06	4.57E+06	3.98E+06	4.57E+06	kNm ²

Tabla 23. Resultado del dimensionamiento de las armaduras.

Para estas mismas armaduras presentadas anteriormente, se calcularon los anchos de fisura característicos que se producen debido a los esfuerzos generados en el estado cuasipermanente de la estructura. Debido al nivel de exposición ambiental que se ha considerado en el problema, el ancho máximo de fisura definido por la normativa español es de 0.20mm. Es muy importante destacar que en las combinaciones en servicio que se ha considerado el efecto de la temperatura sin tomar en cuenta el estado fisurado de la estructura, lo que da como resultado una sobreestimación considerable en los esfuerzos generados, y representa un tema crucial de discusión en este problema de ejemplo.

Verificación de Fisuración					
Md=	3,269.46	6,086.03	3,869.35	6,341.63	kNm
C=	34.00	36.00	34.00	36.00	mm
S=	80.41	66.25	74.38	66.25	mm
s_{min}=	20.00	20.00	20.00	20.00	mm
k₁=	0.13	0.13	0.13	0.13	
A_{c,eficaz}=	1.09E+06	1.65E+06	1.09E+06	1.65E+06	mm ²
s_m=	131.82	126.63	126.99	126.63	mm
σ_s=	166.74	222.66	182.35	232.01	N/mm ²
k₂=	0.50	0.50	0.50	0.50	
M_{cr}/M_d=	0.96	0.69	0.81	0.66	
ε_{sm}=	0.00	0.00	0.00	0.00	
β=	1.70	1.70	1.70	1.70	
w_k=	0.10	0.18	0.13	0.20	mm
w_{max}=	0.20	0.20	0.20	0.20	mm
Verificación	OK	OK	OK	OK	

Tabla 24. Verificación del estado límite de fisuración.

Se puede observar que, para este armado, el ancho de fisura característico en la sección de negativos del apoyo central está muy cerca de sobrepasar el máximo. Para las secciones en positivos, el ancho de fisura calculado se encuentra bien por debajo del máximo, por lo que no representa ningún problema.

Se han generado los diagramas momento-curvatura de las secciones armadas con ayuda del programa CONS. De esta manera se ha podido rastrear con exactitud el comportamiento de la sección hasta alcanzar la curvatura última. A continuación, se presentan dichos diagramas momento-curvatura.

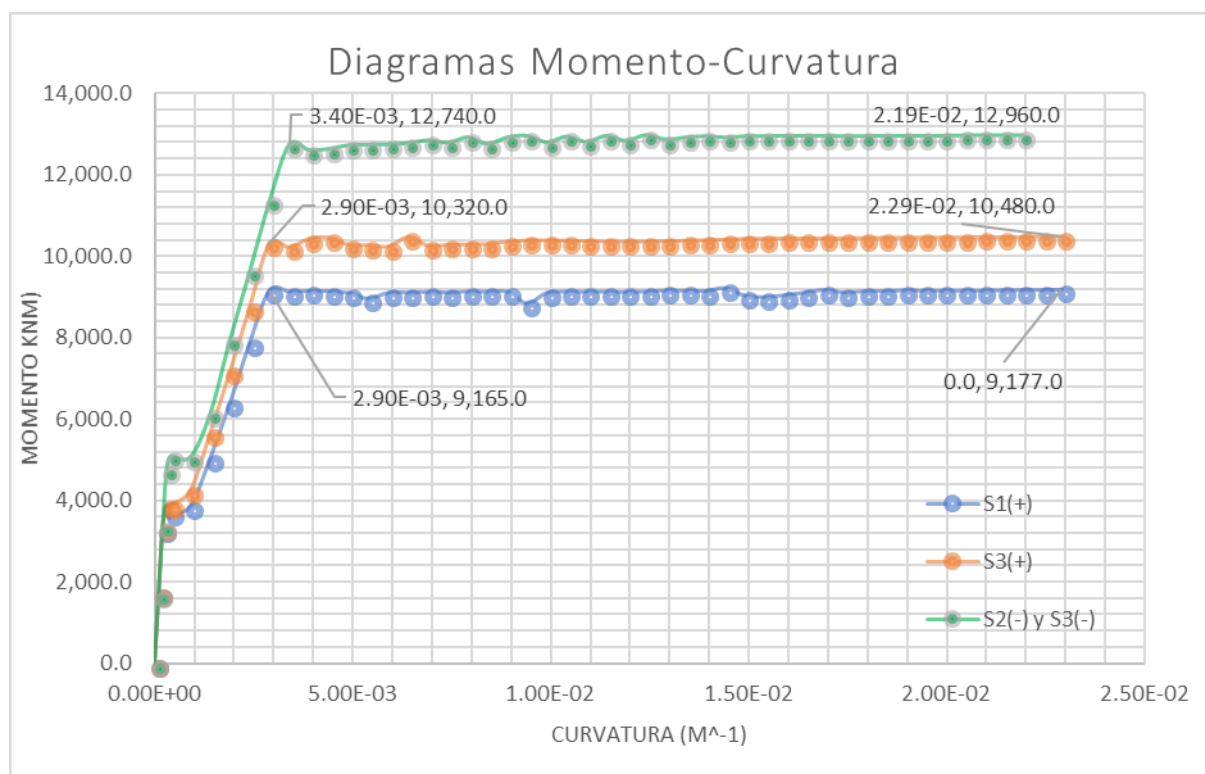


Figura 53. Diagramas Momento Curvatura de las secciones dimensionadas.

Los puntos de interés de cada sección, entiéndase el punto de fisuración, el punto de plastificación y el punto de rotura, se resumen en la siguiente tabla.

Propiedades del Diagrama Momento-Curvatura					
Sección	S1(+)	S2(-)	S3(+)	S4(-)	
$M_{cr} =$	3,849.0	5,077.0	3,907.0	5,077.0	kNm
$\Phi_{cr} =$	9.00E-04	4.00E-04	4.00E-04	4.00E-04	rad/m
$M_y =$	9,165.0	12,740.0	10,320.0	12,740.0	kNm
$\Phi_y =$	2.90E-03	3.40E-03	2.90E-03	3.40E-03	rad/m
$M_u =$	9,177.0	12,960.0	10,480.0	12,960.0	kNm
$\Phi_u =$	2.29E-02	2.19E-02	2.29E-02	2.19E-02	rad/m

Tabla 25. Puntos de plastificación y de rotura de las secciones armadas.

5.6. Análisis y comportamiento no lineal de la estructura

Luego de haber dimensionado las armaduras se llevó a cabo un análisis no lineal de la estructura hasta la rotura para conocer con exactitud el mecanismo que lleva al agotamiento por medio de CONS. El esquema de cargas y el orden que se utilizó para dicho análisis ha sido:

- 1) Peso propio y cargas muertas sobre toda la estructura; afectadas por un factor de 1.35.
- 2) Sobrecarga de uso sobre toda la estructura; afectada por un factor de 1.35.
- 3) Vehículo pesado cargando el segundo vano; afectado por un factor de 1.35.
- 4) Gradiente térmico uniforme sobre toda la estructura; afectado por un factor de 1.5
- 5) Sobrecarga de uso sobre toda la estructura aplicada incrementalmente hasta agotamiento.

La estructura se modeló en CONS discretizándose en elementos iguales de 1 metro de longitud, dando lugar a un total de 64 elementos y 65 nodos. El esquema del modelo de la estructura, así como la disposición de las armaduras se muestra en la imagen a continuación.

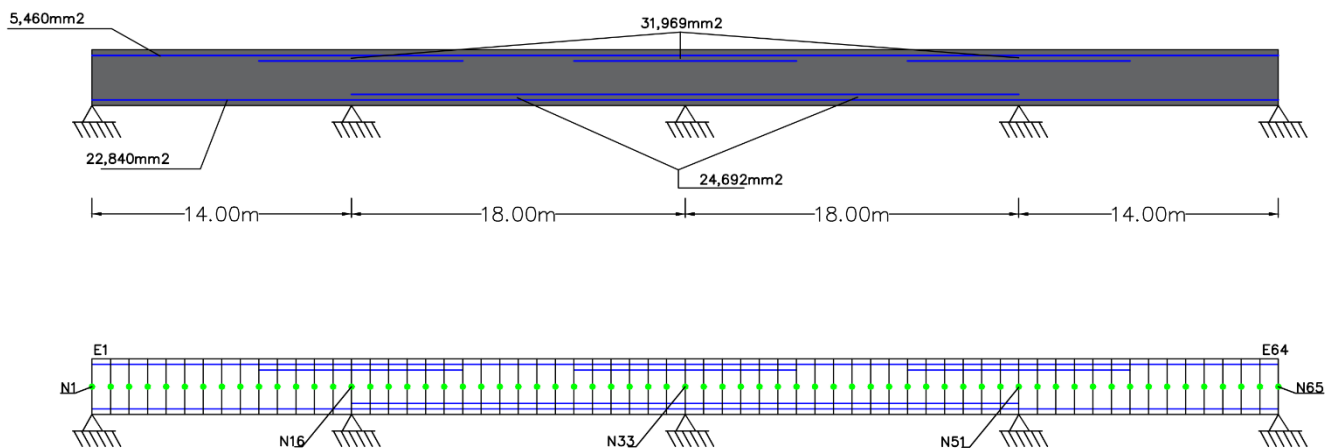


Figura 54. Esquema de la estructura modelada e idealizada en CONS.

5.6.1. Determinación de la carga última de rotura según el cálculo plástico.

Según la teoría plástica, y asumiendo en principio que las secciones tienen la suficiente capacidad de rotación plástica, el colapso se produce cuando plastifican las secciones de negativos en los apoyos 2 y 3 formando dos rótulas plásticas.

A partir de ese momento el vano se comportará de manera similar a un vano simplemente apoyado y agotará cuando plastifique la sección de momento positivo en el medio del vano.

Al igual como se ha hecho anteriormente en este trabajo, es posible calcular el valor de la sobrecarga máxima que se debe aplicar sobre la estructura para que genere el mecanismo de colapso antes descrito por completo. En primer lugar, basta con plantear el estado de esfuerzos y equilibrio en el vano estudiado tal como se muestra en la próxima figura. Una vez, hecho esto, se realiza un corte justo en el medio del vano, y se plantea equilibrio rotacional con respecto a la sección central. Como resultado, se obtiene una expresión que queda en función de los momentos de rotura de las secciones positivas y negativas, de la longitud del vano, y de las cargas aplicadas.

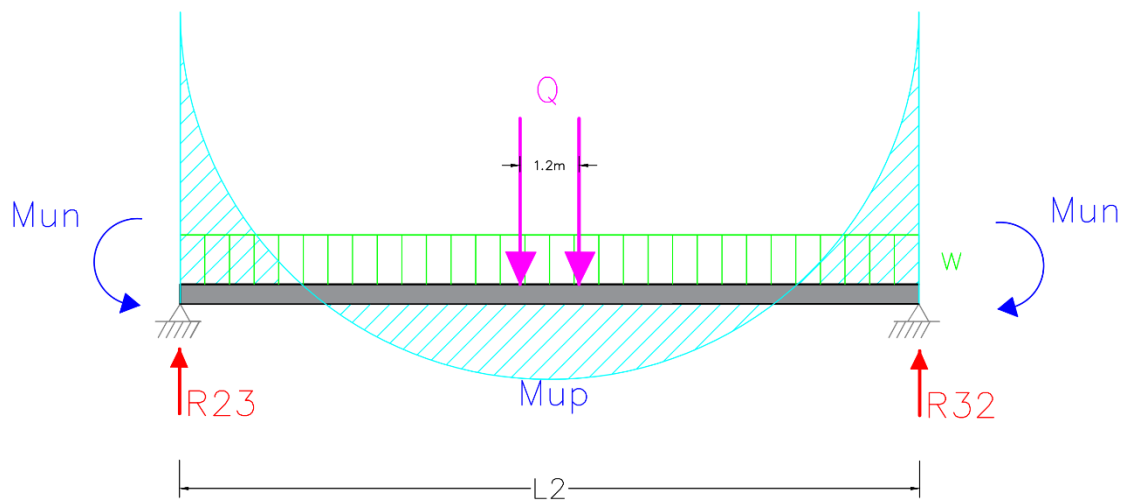


Figura 55. Esquema del estado de esfuerzos en el vano crítico considerado al alcanzar el agotamiento.

$$R_{2-3} = \frac{W_u * L_2}{2} + Q$$

$$M_{un} + M_{up} + W_u \left(\frac{L_2}{2} \right) \left(\frac{L_2}{4} \right) + Q (0.60) - \left(\frac{W * L_2}{2} + Q \right) \left(\frac{L_2}{2} \right) = 0$$

$$W_u = \frac{40M_{un} + 40M_{up} + 4(6 - 5L_2)Q}{5L_2^2} \quad (117)$$

Al aplicar esta expresión se obtiene la carga total uniforme que produce el colapso. Como se desea conocer el valor de la sobrecarga de agotamiento, basta con restar a w_u lo correspondiente al peso propio y las cargas muertas, afectados por el coeficiente de seguridad, por supuesto.

$$q_u = W_u - 1.35g$$

En la próxima tabla se presentan los resultados según los valores que se tienen:

Carga Última de Agotamiento		
Mun=	12,960.0	kNm
Mup=	10,480.0	kNm
Q=	810.0	kN
L=	18.0	m
Wu=	410.77	kN/m
G=	290.42	kN/m
Qu=	120.35	kN/m

Figura 56. Cálculo de la sobrecarga última de agotamiento.

Según este cálculo, la estructura sería capaz de soportar prácticamente el doble de sobrecarga para la cual fueron diseñadas las armaduras. Dicho de otra manera, la estructura cuenta con una reserva de resistencia de 60.275kN/m.

Una vez hecho esto, se ha analizado la estructura a través de un análisis no lineal explícito con CONS. En primer lugar, no se ha aplicado el gradiente térmico, por lo que se busca comparar la carga última de agotamiento obtenida en el análisis no lineal con la que se ha calculado manualmente. En el CONS, la suma total de las reacciones para la carga de rotura es de 28,133.7 kN, por lo que la sobrecarga de agotamiento es:

$$\frac{\left(28,293.7kN - \frac{290.42kN}{m} * 64m - 2 * 810kN\right)}{64m} = 126.36kN/m$$

A través del análisis no lineal explícito, el valor de la sobrecarga de agotamiento es 4.7% mayor que la calculada manualmente, por lo que se considera que se ha hecho una buena predicción de este valor.

Para apreciar de buena manera el comportamiento estructural, es posible graficar el desplazamiento que experimenta el nodo central del vano analizado, como se presenta en la figura a continuación.

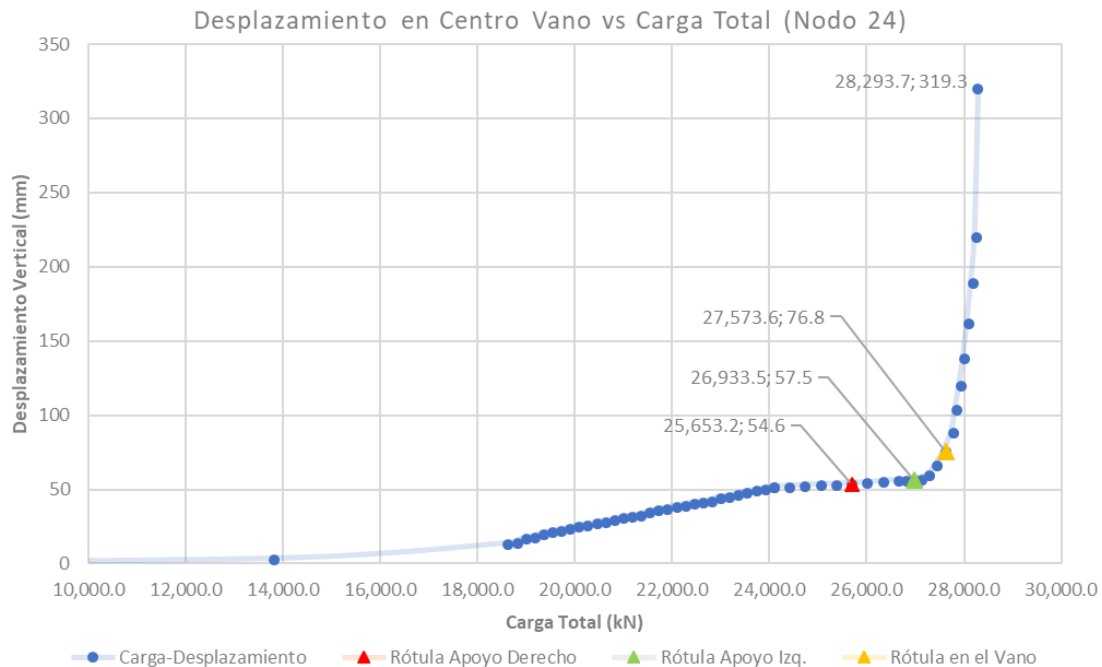


Figura 57. Evolución del desplazamiento vertical del centro de vano con el incremento de carga.

Se observa cómo crece dramáticamente el desplazamiento una vez que se han formado las dos rótulas plásticas en los apoyos, hasta que se alcanza la carga última.

La evolución de los momentos flectores con el incremento de carga muestra un incremento gradual muy similar, hasta que plastifica la sección de negativos del apoyo central del puente. En la gráfica también se muestran los puntos que representan el instante de carga en el que se generan las rótulas plásticas en cada sección.

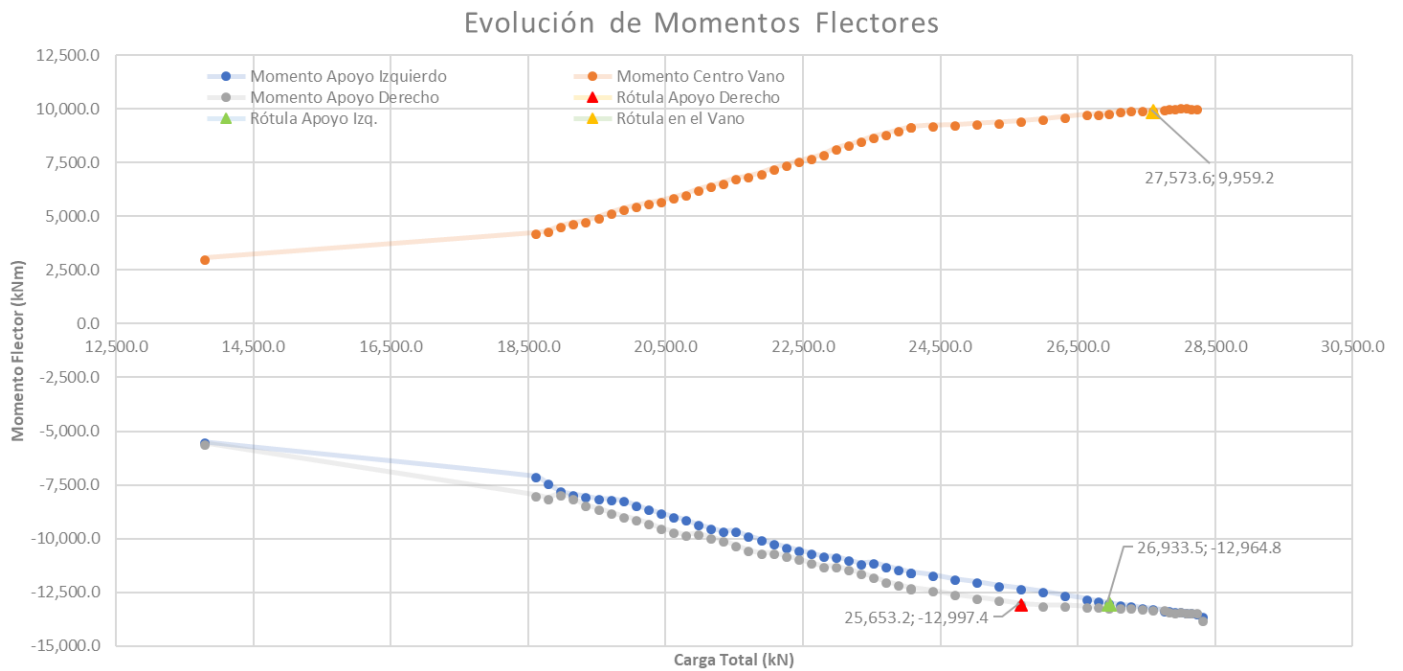


Figura 58. Evolución de los momentos flectores con el incremento de carga hasta rotura.

A partir del análisis con el CONS se ha podido identificar el patrón de formación de rótulas plásticas hasta la formación del mecanismo de colapso. En primer lugar, se plastifica la sección de negativos en el apoyo central del lado derecho del vano estudiado, luego la carga sigue incrementando hasta que se plastifica la sección de negativos en el apoyo izquierdo del vano, y por último, se sigue incrementando la carga hasta la rotura cuando se forme la tercera rótula plástica en el centro de vano.

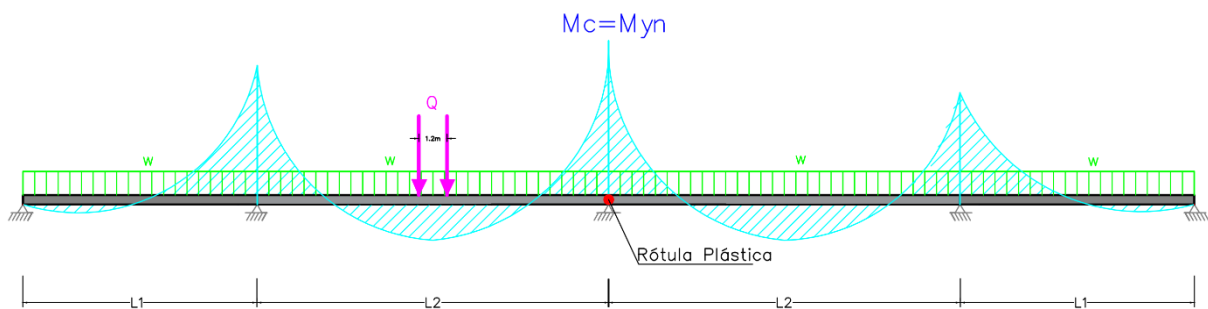
5.6.2. Determinación de las demandas de rotación plástica

Este proceso en cadena antes descrito es muy importante comprenderlo, porque en cada uno de esos pasos, el esquema estructural del puente cambia en varias etapas antes de alcanzar una configuración isostática después de la cual, al formarse la última rótula plástica, se produzca el colapso. En los ejemplos tratados anteriormente, el esquema isostático de la estructura se conseguía luego de haberse formado la primera rótula plástica, o dos rótulas se formaban simultáneamente dando lugar al esquema isostático.

Por esta razón, para que sea posible calcular las rotaciones plásticas en ambas secciones de momento negativo de ambos apoyos, se considera oportuno calcularlas de acuerdo con el esquema estructural adecuado según el nivel de carga.

De primer interés, se desea conocer el valor de la carga distribuida que provoca la plastificación en la sección del apoyo central, y por consiguiente, la formación de la primera rótula plástica. Al momento en esta sección se le llamará M_c por ser el apoyo del centro, tal como se aprecia en la figura más abajo. Entonces, el momento en el apoyo central para esta estructura sometida a una carga uniforme en toda su longitud, más el vehículo pesado es:

$$M_2 = M_c = \frac{W}{4} \cdot \frac{(L_2^3 - L_1^3 + 2L_1L_2^2)}{(4L_1 + 3L_2)} + M_{Qc} \quad (118)$$



Siendo M_{Qc} el momento en dicho apoyo debido a la acción del vehículo pesado; valor que se ha sacado directamente del modelo en SAP2000 analizado en un principio.

Por lo tanto, igualando el momento M_{c1} al momento de plastificación de la sección M_{yn} , y despejando la carga W , se obtiene la carga para la cual se plastifica dicha sección en primer lugar.

$$W_{el,1} = (M_{yn} - M_{Qc}) * \frac{4 * (4L_1 + 3L_2)}{(L_2^3 - L_1^3 + 2L_1L_2^2)}$$

$$W_{el,1} = (12,740 - 2,271.4) * \frac{4 * (4 * 14 + 3 * 18)}{(18^3 - 14^3 + 2 * 14 * 18^2)} = 378.8kN/m$$

Esta es la carga que abre paso al inicio de la primera etapa, cuando en teoría, la estructura pasa a ser considerada como una estructura continua de dos vanos de longitudes L_1 y L_2 . También interesa conocer el valor del momento en la otra sección de apoyo al momento en que se alcanza este nivel de carga. Dicho momento viene dado por:

$$M_1 = M_{b1} = \frac{W_{el,1}}{4} \cdot \frac{(2L_1^3 + L_2^3)}{(4L_1 + 3L_2)} + M_{Qb} \quad (119)$$

$$M_{b1} = \frac{378.8}{4} \cdot \frac{(2 \cdot 14^3 + 18^3)}{(4 \cdot 14 + 3 \cdot 18)} + 2,418.5 = 12,163.0 \text{ kNm}$$

Lo que quiere decir que para que la sección del apoyo izquierda requiere un incremento de momento $\Delta M_b = 12,740.0 - 12,163.0 = 577.0 \text{ kNm}$ para plastificarse y que se forme la segunda rótula plástica.

La relación entre este incremento de momento y el incremento de carga que lo produce ya no viene dada por el esquema estructural inicial con los cuatro vanos continuos, sino que el comportamiento ahora será como el de una viga de cuatro vanos con una articulación en el apoyo central. Por lo tanto, el lado de la estructura que se está analizando sería el siguiente como se muestra en la figura:

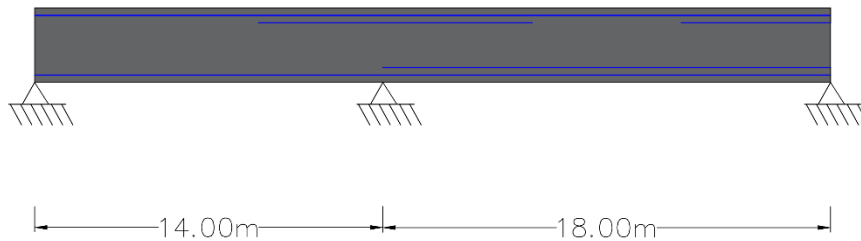


Figura 59. Esquema estructural de la primera etapa, luego de la formación de la primera rótula plástica.

Para esta relación de longitudes entre ambos vanos, la relación entre la carga distribuida uniforme y el momento en el apoyo central, obtenida de prontuario, es:

$$M = 0.1713wL^2$$

Por lo tanto, el incremento de carga ΔW que produce el incremento de momento ΔM_b es igual a:

$$\Delta W_1 = \frac{\Delta M_b}{0.1713 \cdot L^2} = \frac{577.0}{0.1713 \cdot 14^2} = 17.24 \text{ kN/m}$$

Esto quiere decir que al final de esta primera etapa, cuando se forma la segunda rótula plástica, la carga total es:

$$W_{el,2} = W_{el,1} + \Delta W_1 = 395.95 \text{ kN/m}$$

Finalmente, las rotaciones plásticas asociadas a esta primera etapa serán las siguientes:

$$\theta_{p,b,1} = 0$$

$$\theta_{p,c,1} = \frac{\Delta W_1 * L^3}{24 * K_{eq}} - \frac{\Delta M_b * L}{6 * K_{eq}}$$

La rigidez equivalente se ha estimado con la expresión siguiente, presentada anteriormente en este mismo trabajo.

$$K_{eq} = \frac{K_1 K_2 K_3 L^2}{L_1^2 K_2 (K_3 - K_1) + 2 L_1 L_2 K_1 (K_3 - K_2) + L_2^2 K_1 (K_3 - K_2) + L^2 K_1 K_2}$$

El resultado del cálculo para la rigidez equivalente se presenta en el siguiente cuadro:

Rigidez Equivalente del Vano Estudiado		
L=	18.0	m
L₁=	6.0	m
L₂=	6.0	m
K₁=	4,573,869.2	kNm ²
K₂=	3,975,878.5	kNm ²
K₃=	4,573,869.2	kNm ²
K_{eq}=	4,355,506.4	kNm ²

Tabla 26. Cálculo de la rigidez equivalente del vano.

Así, los valores de la rotación plástica demandada por las acciones mecánicas durante la primera etapa de carga serán:

$$\theta_{p,b,1} = 0$$

$$\theta_{p,c,1} = \frac{17.24 * 18^3}{24 * 4,355,506} - \frac{577.0 * 18}{6 * 4,355,506} = 0.0005614 \text{ radianes}$$

La segunda etapa de carga comprende desde el momento en que se forma la penúltima rótula plástica hasta cuando se alcanza el agotamiento. En esta etapa, ya se han formado rótulas plásticas en ambos apoyos del vano por lo que el nuevo esquema estructural corresponde al de una viga simplemente apoyada. Este esquema estructural se puede apreciar en la próxima figura.

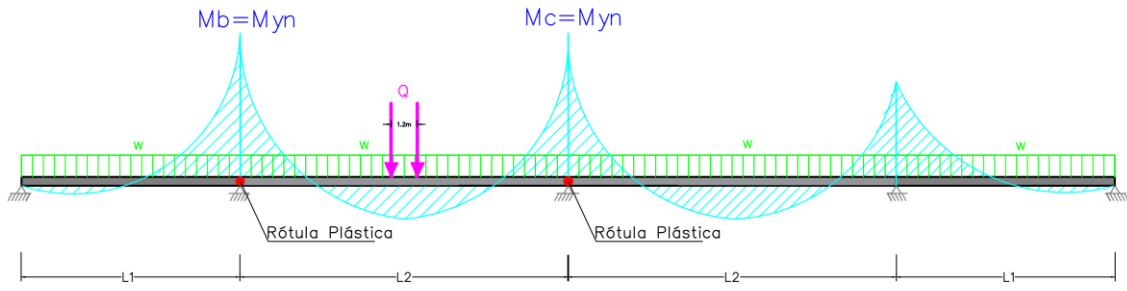


Figura 60. Esquema estructural luego de la formación de las dos rótulas plásticas en los apoyos.

El incremento de carga que actuará durante esta etapa será entonces:

$$\Delta W_2 = W_u - W_{el,2} = 410.77 - 395.95 = 14.82 \text{ kN/m}$$

La demanda de rotación plástica de esta etapa sobre las dos rótulas plásticas de ambos apoyos será entonces:

$$\theta_{p,b,2} = \theta_{p,c,2} = \frac{\Delta W_2 * L^3}{24 * K_{eq}} = \frac{14.82 * 18^3}{24 * 4,355,506} = 0.0008268 \text{ radianes}$$

Por lo tanto, las demandas de rotación plástica mecánica en ambas rótulas para alcanzar el mecanismo de colapso de la estructura son:

$$\begin{aligned} \theta_{m,b}^p &= 0.0008268 \text{ radianes} \\ \theta_{m,c}^p &= 0.0013881 \text{ radianes} \end{aligned}$$

Ahora bien, es hora de incluir la demanda de la deformación impuesta del gradiente térmico sobre estas rótulas plásticas, y por consiguiente, determinar si esto debería o afectar o no a la capacidad total de la estructura.

La demanda geométrica de rotación plástica requerida por el gradiente térmico se calcula muy fácilmente, ya que se trata de calcular la rotación de los extremos de una viga simplemente apoyada por el efecto de una curvatura impuesta uniforme.

$$\theta_{nm}^p = \frac{C_t * L}{2}$$

En el próximo cuadro, se calcula y se muestra el valor de esta demanda de rotación. La temperatura se ha afectado por un factor de seguridad de 1.5, tal como establece la normativa para considerar las acciones climáticas en estado límite último.

Demanda No Mecánica por la Temperatura		
Coef. α =	0.0000099	/°C
$(\Delta T_s - \Delta T_i)$ =	12.0	°C
h=	1.0	m
L=	18.0	m
Ct=	0.00012	m ⁻¹
θ_{nm} =	0.00107	rad

Tabla 27. Cálculo de la demanda geométrica en ambas rótulas plásticas.

Llama la atención que la demanda de rotación plástica generada por el gradiente térmico es bastante comparable con la demanda de rotación que ameritan las cargas. La demanda total de rotación plástica en cada una de las rótulas es:

$$\begin{aligned}\theta_b^p &= 0.001897 \text{ radianes} \\ \theta_c^p &= 0.002458 \text{ radianes}\end{aligned}$$

El siguiente paso, es calcular la capacidad total de rotación plástica de estas rótulas, para determinar si en este caso las deformaciones impuestas del gradiente térmico tendrán alguna repercusión en la capacidad de carga de la estructura.

Se procede entonces a calcular la longitud plástica de la rótula:

$$l_p = 2 * \left(\frac{M_u - M_y}{V_d} + 0.5z \right) = 2 * \left(\frac{12,960 - 12,740}{4,543.81} - 0.5 * 0.9 * 0.95 \right) = 0.952m$$

Luego, se calcula la capacidad de rotación plástica de la sección:

$$\theta^p = \frac{\varphi_u - \varphi_y}{2} * l_p = \frac{(2.19 \times 10^{-2}) - (3.4 \times 10^{-3})}{2} * 0.952 = 0.0088 \text{ rad}$$

Como se puede observar, basado en los resultados, la sección tiene capacidad suficiente de rotación plástica, es decir ductilidad, para cumplir tanto con la demanda mecánica de las cargas como con la demanda no mecánica de la deformación impuesta por la temperatura. Por consiguiente, es posible ignorar el efecto de la deformación impuesta debido a que la capacidad total de la estructura no se verá afectada por falta de ductilidad.

Esta conclusión ha sido corroborada analizando la estructura con el CONS, pues se ha llevado a cabo el análisis no lineal nuevamente aplicando el escalón de carga correspondiente al gradiente térmico, afectado por su factor de seguridad de 1.5 y, como se esperaba, la resistencia última de la estructura no se ha visto afectada en lo absoluto.

5.7. Propuesta de armado asumiendo redistribución de momentos

A continuación, se dimensionarán una vez más las armaduras del tablero del puente, esta vez asumiendo desde un principio un nivel de redistribución de momentos desde las secciones de apoyo a las secciones interiores de los vanos. El nivel de redistribución que ha sido asumido fue tal que los momentos máximos negativos y positivos fueran similares en magnitud de su valor absoluto. Para esto, el momento máximo negativo en ambos apoyos se limitó a $\delta M_{\max(-)} = 11,000 \text{ kNm}$. La ley de momentos final que se pretende lograr y la redistribución a llevarse a cabo se representa gráficamente en la siguiente figura.

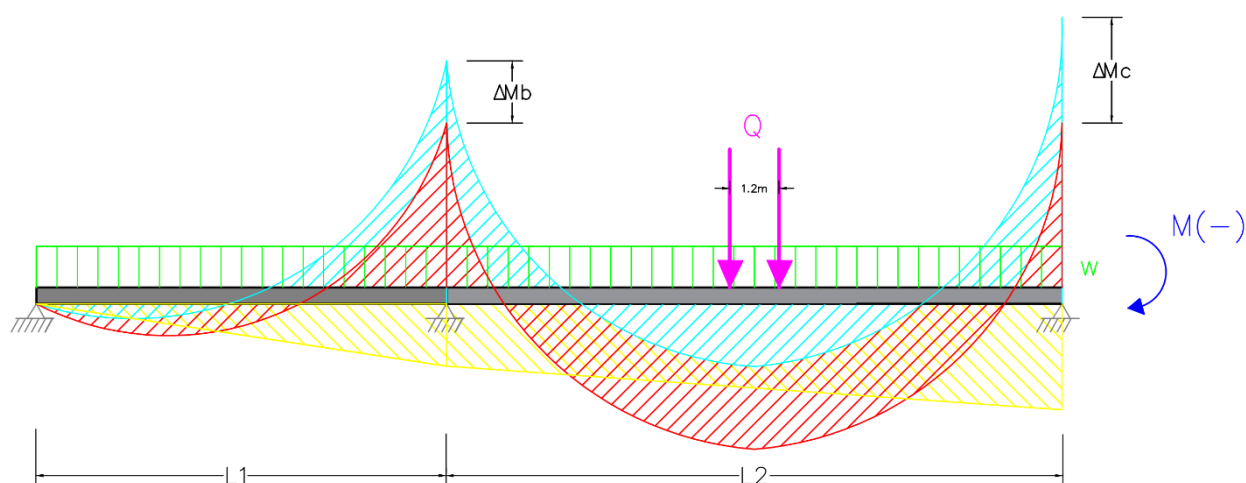


Figura 61. Redistribución de momentos y ley de momentos final propuesta.

Lo que se pretende con esta sección es demostrar las bondades de reconocer la capacidad de redistribución de esfuerzos en las estructuras de hormigón, y de la importancia de considerar la rigidez fisurada al momento de cuantificar los efectos de las deformaciones impuestas en estado límite de servicio. Las armaduras anteriores, así como el comportamiento en servicio, fueron verificados calculando los esfuerzos máximos considerando la rigidez íntegra de del elemento. Esta práctica trae consigo una sobreestimación importante de los esfuerzos en servicio, y por lo tanto, mayores anchos de fisura erróneamente calculados.

Una vez más, se verificará que las secciones dimensionadas tienen ductilidad suficiente como para poder enfrentar las demandas de rotación plástica para lograr la redistribución deseada y permitir las deformaciones impuestas, sin agotar su capacidad máxima de deformación.

5.7.1. Determinación de la nueva ley de momentos flectores

La redistribución de momentos necesarias en las secciones de apoyo son las siguientes:

$$\Delta M_b = 11,652.10 - 11,000 = 653.10 kNm$$

$$\Delta M_c = 12,335.40 - 11,000 = 1,335.40 kNm$$

Esto lleva consigo pues un incremento en los esfuerzos de las secciones de momentos positivos. Las secciones críticas positivas de los vanos extremos, que se encuentran a $0.46L$ desde los apoyos extremos, verán un incremento de:

$$\Delta M_{p1} = 0.46 * 652.10 = 299.97 kNm$$

Luego, en la sección crítica en el centro de los vanos interiores, verán un incremento de momentos flectores de:

$$\Delta M_{p2} = \frac{653.10 + 1,335.40}{2} = 994.25 kNm$$

Por lo tanto, los esfuerzos máximos que se producirán al final, asumiendo la redistribución, serán:

Combinación	Momento Flector (kNm) Sección			
	S1 (+)	S2 (-)	S3 (+)	S4 (-)
ELU	9,501.36	-11,000.00	10,920.70	-11,000.00

5.7.2. Dimensionamiento de las armaduras según los esfuerzos redistribuidos

Una vez determinados los esfuerzos máximos que soportarán las secciones críticas, se procede a dimensionar nuevamente las armaduras de las secciones.

Sección	S1 (+)	S2(-)	S3(+)	S4(-)	
h=	1,000.00	1,000.00	1,000.00	1,000.00	mm
b=	10,600.00	5,950.00	10,600.00	5,950.00	mm
bo=	5,300.00	10,600.00	5,300.00	10,600.00	mm
d=	950.00	950.00	950.00	950.00	mm
d'=	50.00	50.00	50.00	50.00	mm
M_d=	9,501.36	11,000.00	10,920.70	11,000.00	kNm
U_o=	2.01E+08	1.13E+08	2.01E+08	1.13E+08	N
Mlim=	71,748.75	40,274.06	71,748.75	40,274.06	kNm
U_{s1}=	1.03E+07	1.22E+07	1.18E+07	1.22E+07	N
As_{1(teorico)}=	23,604.71	28,156.03	27,240.55	28,156.03	mm ²
Φ=	20.00	14.00	20.00	14.00	mm
Ab=	314.16	153.94	314.16	153.94	mm ²
nb=	76.00	183.00	87.00	183.00	barras
s=	68.83	57.61	60.23	57.61	mm
As_{1(real)}=	23,876.1	28,170.7	27,331.9	28,170.7	mm ²
%dif=	1.15%	0.05%	0.34%	0.05%	
As1(anterior)=	22,933.63	31,968.85	24,818.58	31,968.85	mm ²
% dif=	4.11%	-11.88%	10.13%	-11.88%	
ρ₁=	0.00237	0.00498	0.00271	0.00498	
As₂=	5,460.00	5,460.00	5,460.00	5,460.00	mm ²
ρ₂=	0.00054	0.00097	0.00054	0.00097	
x/d=	0.164	0.227	0.174	0.227	
x=	155.81	215.72	165.74	215.72	mm
I_{cr}=	1.19E+11	1.27E+11	1.34E+11	1.27E+11	mm ⁴
I_{eff}=	1.37E+11	1.54E+11	1.46E+11	1.54E+11	mm ⁴
k_{eff}=	3.93E+06	4.41E+06	4.17E+06	4.41E+06	kNm ²

Tabla 28. Resultados del dimensionamiento de las armaduras según los nuevos esfuerzos considerados.

Con este nuevo dimensionamiento, comparando la cantidad aproximada total de acero longitudinal que se necesitaría para armar toda la longitud del tablero se tiene que con el armado anterior se necesitaría alrededor de 3.6% más material, lo que equivale a aproximadamente 616 Kg más de acero. A un precio actual promedio de €105.00/Kg de acero en España, esto representa un total de €64,680 de ahorro en material.

Los diagramas momento curvatura de las secciones se presentan a continuación, así también como un resumen con las propiedades de sus puntos críticos:

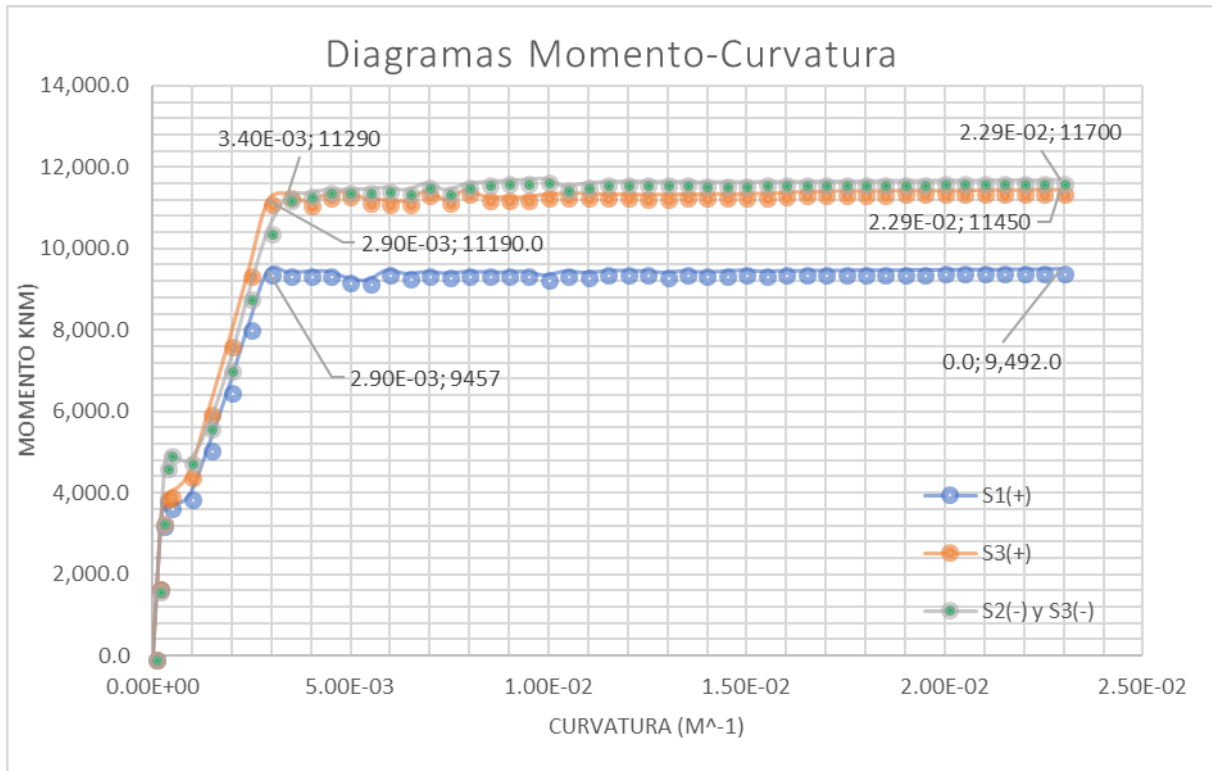


Figura 62. Diagramas momento curvatura de las nuevas secciones dimensionadas.

Propiedades del Diagrama Momento-Curvatura					
M_{cr}	3,866.0	5,001.0	3,951.0	5,001.0	kNm
Φ_{cr}	3.00E-04	4.00E-04	3.00E-04	4.00E-04	rad/m
M_y	9,457.0	11,290.0	11,190.0	11,290.0	kNm
Φ_y	2.90E-03	3.40E-03	2.90E-03	3.40E-03	rad/m
M_u	9,492.0	11,700.0	11,450.0	11,700.0	kNm
Φ_u	2.29E-02	2.29E-02	2.29E-02	2.29E-02	rad/m

Tabla 29. Puntos de plastificación y de rotura de las secciones armadas. (II)

Por otro lado, para la verificación del estado límite de fisuración se han calculado los esfuerzos generados por el gradiente térmico en estado límite de servicio considerando una rigidez fisurada equivalente. De manera práctica, se ha calculado la rigidez fisurada de las secciones con la expresión:

$$I_{cr} = 0.0125 * (1 + 36n\rho)b * d^3$$

A cada sección se le ha asignado una longitud tributaria, para determinar un valor de rigidez equivalente que sea más o menos representativo de la estructura.

Luego, dividiendo el valor de esta rigidez equivalente entre la rigidez bruta de la sección, se obtuvo lo que se le llamó un factor de reducción, el cual se le aplicó a la acción térmica en las combinaciones de carga calculadas en SAP2000.

De esta manera los nuevos valores esfuerzos obtenidos para las combinaciones de carga en servicio se presentan en la siguiente tabla:

Combinación	Momento Flector (kNm) Sección			
	S1 (+)	S2 (-)	S3 (+)	S4 (-)
ELS (K)	6,593.62	-8,300.60	7,193.55	-8,820.11
ELS (FR)	5,473.81	-7,397.66	5,969.55	-7,859.55
ELS (QP)	2,894.40	-5,566.30	3,044.62	-5,981.76

Tabla 30. Momentos flectores para las combinaciones de ELS, considerando la rigidez fisurada en las acciones de deformaciones impuestas.

Por último, con estos esfuerzos, se calcularon los anchos de fisura correspondiente para asegurar que verificaran con los valores máximos ya establecidos.

Verificación de Fisuración					
$I_{eff}=$	1.81E+11	1.44E+11	1.91E+11	1.44E+11	mm ⁴
$k_{eff}=$	5.19E+06	4.11E+06	5.47E+06	4.11E+06	kNm ²
$L_{tributaria}=$	9.00E+00	1.10E+01	6.00E+00	6.00E+00	m
$I_{eq}=$	1.63E+11				mm ⁴
$F_{red}=$	2.63E-01				
$M_{qp}=$	2,894.40	5,566.30	3,044.62	5,981.76	kNm
$C=$	34.00	37.00	34.00	37.00	mm
$S=$	68.83	57.61	60.23	57.61	mm
$s_{min}=$	20.00	20.00	20.00	20.00	mm
$k_1=$	0.13	0.13	0.13	0.13	
$A_{c,eficaz}=$	9.75E+05	1.51E+06	9.75E+05	1.51E+06	mm ²
$s_m=$	122.61	122.92	115.73	122.92	mm
$\sigma_s=$	141.78	231.10	130.29	248.35	N/mm ²
$k_2=$	0.50	0.50	0.50	0.50	
$M_{cr}/M_d=$	1.09	0.75	1.03	0.70	
$\epsilon_{sm}=$	0.00	0.00	0.00	0.00	
$\beta=$	1.70	1.70	1.70	1.70	
$w_k=$	0.06	0.17	0.06	0.20	mm
$w_{max}=$	0.20	0.20	0.20	0.20	mm
Verificación	OK	OK	OK	OK	

Tabla 31. Verificación del estado límite de fisuración asumiendo rigidez fisurada.

Cabe destacar, que es muy posible que, si se hubiera considerado la rigidez bruta de la sección al calcular los efectos de las deformaciones impuestas, los anchos de fisura habrían sido sobreestimados, y por lo tanto, hubiera sido necesario la colocación de más armadura.

5.7.3. Determinación de la carga última de agotamiento

La sobrecarga última que se supone que produce el agotamiento de la estructura se calcula de la misma manera que se ha hecho anteriormente:

Carga Última de Agotamiento		
Mun=	11,700.0	kNm
Mup=	11,450.0	kNm
Q=	810.0	kN
L=	18.0	m
Wu=	403.6	kN/m
G=	290.4	kN/m
Qu=	113.2	kN/m

Tabla 32. Resultados del cálculo de la sobrecarga última que agota la estructura.

Aunque para este nuevo dimensionamiento la sobrecarga última es un tanto menor que el cálculo anterior, la estructura es aún capaz de soportar niveles de carga mucho más allá de las que vienen dadas por combinación de cargas en estado límite último.

Se ha hecho la corroboración con ayuda de CONS, analizando la estructura con estas armaduras, y según el programa la sobrecarga última de agotamiento es de 118.86kN/m, un 4.77% mayor a la calculada manualmente. En la gráfica de carga total-desplazamiento de la sección central del vano, se puede percibir como la estructura agota para una carga menor que para el armado anterior, y además, el desplazamiento último es mucho mayor en este caso.

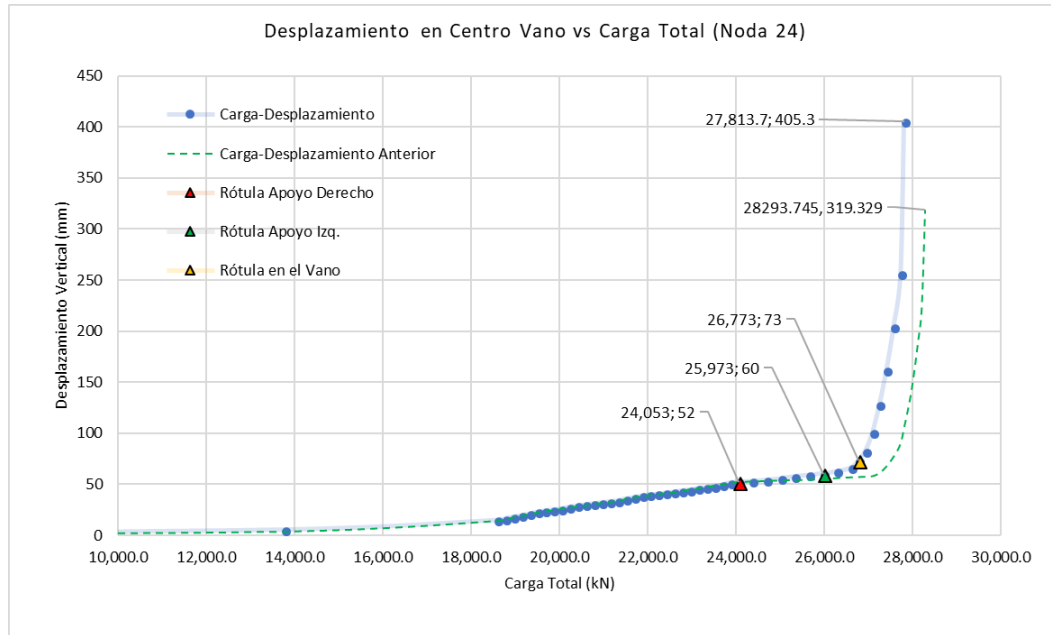


Figura 64. Evolución del desplazamiento vertical del centro de vano según el incremento de carga.

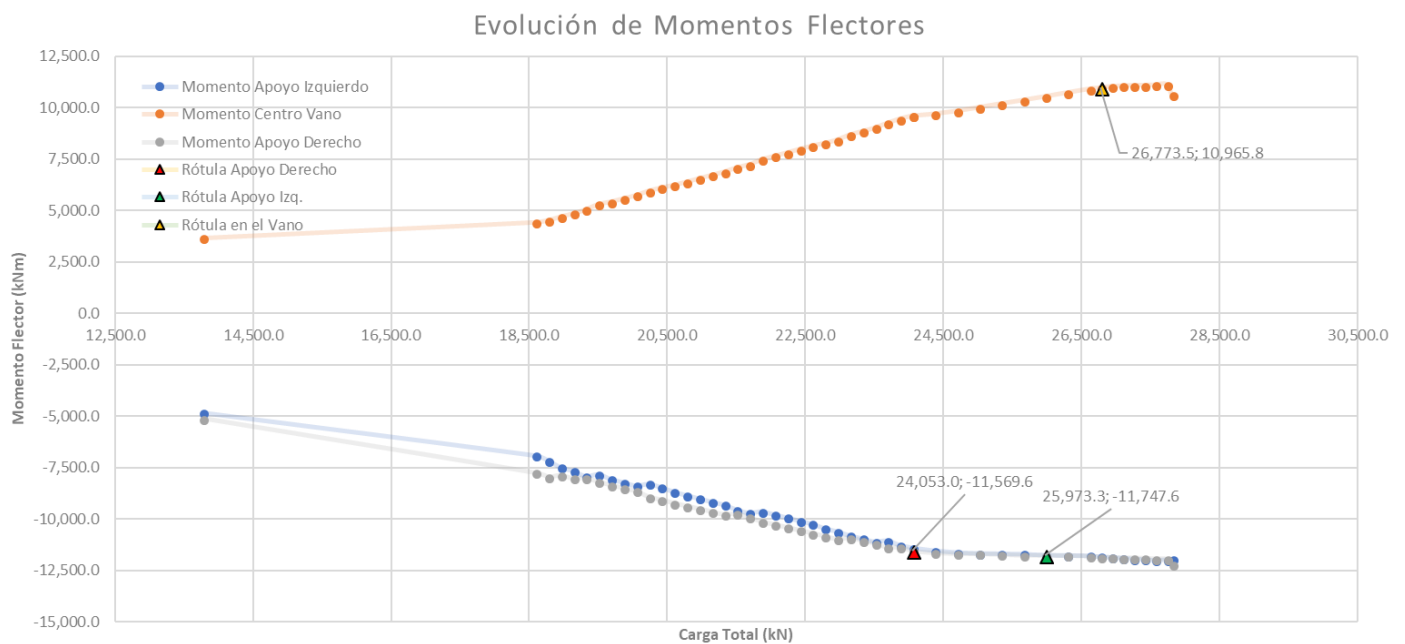


Figura 63. Evolución de los momentos flectores con el incremento de la carga.

En cuanto al comportamiento de los momentos a lo largo del proceso de carga, es muy similar al caso anterior, tan solo que las secciones todas plastifican para valores de momento bastante parecidos. A partir de la formación de la primera rótula plástica, los momentos de la sección

5.7.4. Cálculo de las demandas de rotación plásticas en las secciones.

Al igual como se hizo anteriormente, es necesario calcular una rigidez equivalente para la estimación de las rotaciones plásticas producidas por las cargas. En este caso, los resultados del cálculo han sido:

Rigidez Equivalente del Vano Estudiado		
L=	18.0	m
L₁=	6.0	m
L₂=	6.0	m
K₁=	4,412,688.3	kNm ²
K₂=	4,168,048.4	kNm ²
K₃=	4,412,688.3	kNm ²
K_{eq}=	4,328,012.0	kNm ²

Tabla 33. Cálculo de la rigidez equivalente del vano estudiado.

La demanda de ductilidad sobre las secciones críticas por parte de las cargas se calcula llevando a cabo el mismo procedimiento ya desarrollado para las armaduras calculadas en un principio. En este caso, los resultados se recogen en la siguiente tabla.

Demanda Mecánica de Rotación Plástica		
M_{un}=	11,290.0	kNm
M_{Qb}=	2,418.5	kNm
M_{Qc}=	2,272.4	kNm
L₁=	14.0	m
L₂=	18.0	m
1era Etapa: Plast. Apoyo C hasta Plast. Apoyo B		
M_{c1}=	11,290.0	kNm
W_{el,1}=	326.3	kN/m
M_{b1}=	10,813.2	kNm
M_{b1'}=	11,290.0	kNm
ΔM_{b1}=	476.8	kNm
ΔW₁=	14.2	kN/m
θ_{p,b,1}=	0.000000	rad
θ_{p,c,1}=	0.000467	rad
2da Etapa: Continuación de carga con ambos apoyos plast		
W_u=	403.60	kN/m
W_{el,2}=	340.50	kN/m
ΔW₂=	63.11	kN/m
θ_{p,b,2}=	0.00354	rad
θ_{p,c,2}=	0.00354	rad
Resultado Final		
θ_{p,b}=	0.00354	rad
θ_{p,c}=	0.00401	rad

Tabla 34. Demanda de rotación plástica debido a las cargas sobre las secciones críticas hasta formar el mecanismo de colapso.

Se puede observar que en este caso las rotaciones necesarias en las rótulas para llegar al agotamiento de la estructura son mayores que en el caso anteriormente estudiado.

La demanda no mecánica producida por el gradiente térmico es exactamente la misma que fue calculada anteriormente, por lo que entonces, la demanda total de rotación plástica en ambas secciones críticas es:

$$\begin{aligned}\theta_b^p &= 0.00461 \text{ radianes} \\ \theta_c^p &= 0.00508 \text{ radianes}\end{aligned}$$

Ya solo queda calcular la capacidad máxima de rotación de la sección y compararla con la demanda recién calculada para determinar si la deformación impuesta puede tener alguna repercusión negativa en la capacidad en la capacidad máxima del puente.

Primero se calcula la longitud plástica de la rótula:

$$l_p = 2 * \left(\frac{M_u - M_y}{V_d} + 0.5z \right) = 2 * \left(\frac{11,700 - 11,290}{4,478.5} - 0.5 * 0.9 * 0.95 \right) = 1.04m$$

Y por último, la capacidad máxima de rotación plástica:

$$\theta^p = \frac{\varphi_u - \varphi_y}{2} * l_p = \frac{(2.29 \times 10^{-2}) - (3.4 \times 10^{-3})}{2} * 1.04 = 0.0101 \text{ rad}$$

Como era de esperarse, esta sección, al tener menos armadura que en el caso anterior, era predecible que tuviera una mayor ductilidad, lo que la hacía muy probable que, para este caso, tampoco influyeran las deformaciones impuestas en la capacidad última de la estructura.

Aunque es cierto que el gradiente en el otro sentido que sugiere la norma es de mayor magnitud, este produciría efectos críticos en un caso donde se formara la primera rótula plástica en el vano. Sin embargo, la posibilidad de considerar una redistribución en sentido inverso al propuesto, donde se redistribuyeran los esfuerzos hacia los apoyos, se ha descartado debido a las siguientes razones que se han detectado al momento de abarcar el caso:

- Para que se forme una rótula plástica en el centro de uno de los vanos más largos, aún asumiendo un porcentaje de redistribución razonable, se requeriría una cuantía de armadura en los apoyos mucho mayor que la necesaria por la ley de esfuerzos redistribuida. Este incremento de cuantía en las secciones de apoyo no se considera que tenga una justificación beneficiosa.

- La configuración de cargas que promueve la formación de la primera rótula plástica en el vano (sobrecarga solo en los vanos 1-3 o 2-4) es bastante específica y única. Las demás configuraciones de cargas facilitan la formación de rótulas en los apoyos.

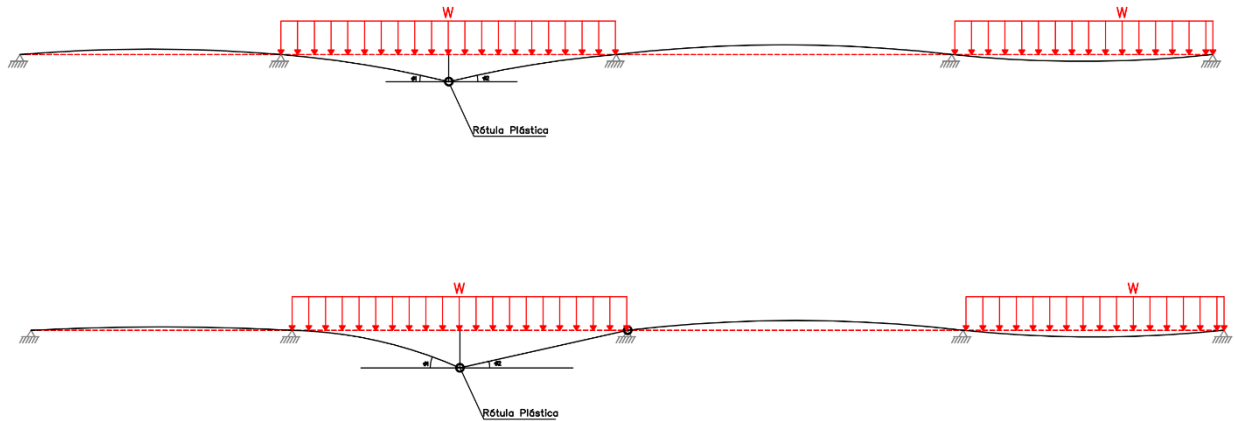


Figura 65. Esquema de configuración de sobrecarga para promover la formación de la primera rótula plástica en el vano.

- Si bien se llega a formar la primera rótula en el vano, cuando se forme la siguiente rótula plástica en el apoyo, el gradiente térmico producirá una rotación desfavorable en la rótula plástica del vano, la cual es bastante dúctil por su poca armadura y su longitud plástica (por encontrarse en zona de momentos positivos); pero en las rótulas de los apoyos la rotación que ejercería el gradiente sería en sentido contrario al de las cargas, con lo cual estaría produciéndose un efecto favorable sobre estas secciones.

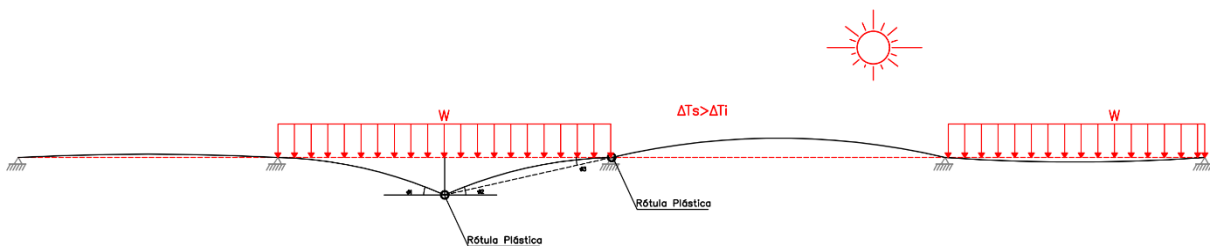


Figura 66. Esquema mostrando el efecto del gradiente térmico positivo sobre el esquema estructural del puente previo a la formación del mecanismo de colapso.

Por lo tanto, a excepción de casos específicos donde se tengan grandes momentos positivos, como puede ser en puentes con vanos extremos mayores que los centrales, es poco probable la posibilidad de que se forme la rótula plástica en el centro.

6. Conclusiones y perspectivas

6.1. Conclusiones generales

A partir del desarrollo mostrado en este trabajo y de los resultados obtenidos en los diferentes casos y ejemplos estudiados, se puede concluir que efectivamente las deformaciones impuestas pueden afectar las estructuras en estado límite último. Ha sido posible plantear una metodología que permite identificar las circunstancias sobre las cuales la resistencia última de una estructura puede verse afectada por acciones de tipo geométrico, además de haber propuesto ejemplos demostrando cómo pueden cuantificarse.

El concepto de rotación plástica efectiva planteado en esta tesis de máster, definido como la suma total de la demanda de rotación plástica debido a las cargas más la demanda de rotación como efecto de las acciones geométricas, resulta bastante interesante en el sentido de que representa el verdadero requerimiento de ductilidad para el cual deben dimensionarse las secciones críticas de una estructura, y considera en conjunto tanto los efectos de las cargas como los efectos de las deformaciones, que hasta ahora había sido ignorado al momento de dimensionar secciones para un nivel necesario de ductilidad. De hecho, se ha podido demostrar que para que las deformaciones impuestas no afecten la resistencia última, se debe proporcionar suficiente ductilidad para que se forme el mecanismo de colapso, de lo contrario, las secciones más solicitadas llegarán al agotamiento antes de formar el mecanismo, y la resistencia de la estructura se verá afectada negativamente.

En efecto, se ha conseguido proponer una metodología que, basada que los principios del análisis plástico de estructuras y el comportamiento no lineal de las estructuras de hormigón, permite tomar en cuenta la verdadera demanda de las deformaciones impuestas en estructuras en rotura.

Por otro lado, se ha estudiado el comportamiento en servicio de las estructuras sometidas a deformaciones impuestas. El aspecto más importante referente a la consideración de estos efectos sobre la estructura es el fenómeno de la fisuración, que trae consigo una reducción importante de la rigidez seccional. Cuantificar los efectos de las deformaciones impuestas considerando la rigidez intacta de la sección transversal lleva consigo una sobreestimación innecesaria de los esfuerzos, y por tanto, de los anchos de fisura. Al hacer esto, el proyectista se ve en la necesidad de tener que colocar mayores cuantías de armadura para lograr cumplir con las verificaciones en estado límite de servicio.

Por esta razón se ha propuesto un procedimiento sencillo, práctico y racional para calcular el ancho de fisura característico en estructuras que se vean sometidas a cargas y curvaturas impuestas en estado de servicio, tomando en cuenta la rigidez fisurada en los esfuerzos que producen estas deformaciones.

También se ha desarrollado una expresión adimensional que permite aproximar, de manera conservadora y con muy poco margen de error, el ancho de fisura característico de secciones rectangulares en estructuras frente a ambos tipos de acciones. Adicionalmente, se han elaborado una serie de gráficos con los cuales, según ciertos parámetros que dependen del caso estudiado, se puede extraer el valor del ancho de fisura sin necesidad de aplicar la expresión directamente.

6.2. Conclusiones específicas

Algunas conclusiones específicas que pueden extraerse de los estudios realizados son:

- En vigas continuas con sección tipo losa, como es el caso de un gran número de puentes de hormigón, la ductilidad de las secciones críticas es considerablemente alta, y es posible la formación de mecanismos de colapso, por lo que puede ignorarse el efecto de las deformaciones impuestas en ELU.
- En puentes con luces habituales y vanos relativamente compensados, los momentos máximos son los negativos, que se encuentran sobre los apoyos; por lo que el gradiente térmico de mayor magnitud, según la normativa (mayor temperatura superior que inferior), no resulta crítico, pues es favorable en las secciones de apoyos.

- En vigas continuas, y específicamente en puentes losa, los asientos de apoyo más desfavorables son los que ocurren en los estribos (caso típico de consolidación del terraplén), pues estos generan momentos negativos y demandas de curvatura sobre los apoyos en el mismo sentido que las cargas. La reducción de capacidad resistente observada debido a los asientos de apoyo superó el 50% en el primer caso estudiado, para un asiento máximo de relación $L/60=0.10m$.
- Para el caso estudiado, la reducción de armadura derivada de considerar adecuadamente las deformaciones impuestas, tanto en el cálculo frente a ELU como frente a ELS, llegó a alcanzar un 3.7%, aunque pudieran haberse estudiado otras estrategias o asumido mayor redistribución para lograr aún más ahorro de material. El ahorro en armado que se pueda conseguir siempre va a depender de la estrategia de distribución que asuma el proyectista y del esquema estructural del caso en estudio. Es posible que se puedan lograr mayores ahorros de armadura. Por otra parte, esta reducción de armadura aumenta la ductilidad respecto de una estructura armada a partir de cálculos elásticos, y por tanto, mejora el comportamiento en servicio.
- Los cálculos realizados manualmente mediante el planteamiento teórico desarrollado basado en la plasticidad, han sido corroborados mediante un riguroso modelo numérico de análisis no lineal. Este cálculo ha permitido, mediante un procedimiento de carga incremental, detectar la fisuración y la sucesiva formación de rótulas plásticas hasta alcanzar el colapso.
- En base a la revisión bibliográfica realizada, se ha podido detectar que existe un déficit importante de información con respecto al tratamiento en general de las deformaciones impuestas. Inclusive, las normativas actuales tratan el tema con mucha superficialidad, obligando al proyectista a trabajar de manera muy subjetiva.
- Las secciones con mayores requerimientos de ductilidad son aquellas donde se forman las primeras rótulas plásticas, por lo que se debe prestar especial atención a estas secciones al momento de calcular la rotación plástica efectiva de dicha rótula.
- Se ha podido identificar que uno de los parámetros más importantes al momento de cuantificar la incidencia de las deformaciones impuestas sobre la resistencia última de una losa continua, como puede ser un puente, es el valor de rigidez fisurada que se utiliza.

6.3. Recomendaciones para futuras líneas de investigación

El primer aspecto relevante que desarrollar es una metodología rápida (o expresiones analíticas) que permita, de forma simple, detectar cuando una estructura diseñada sin haber tenido en cuenta las deformaciones impuestas en ELU, es capaz de desarrollar un mecanismo de colapso y garantizar así la adecuación del armado propuesto.

Otro aspecto de interés es extender la metodología al caso de vigas continuas pretensadas con armaduras postesas, lo cual implica dos aspectos importantes:

- Estimar la rigidez de la pieza fisurada con presencia de un esfuerzo axial.
- Evaluar los esfuerzos hiperestáticos de pretensado.

La metodología se ha desarrollado para vigas continuas, donde las acciones geométricas que producen flexión son curvaturas impuestas (debidas a gradientes térmicos o asientos de apoyo, fundamentalmente). Se consideraría como un paso muy importante extender la formulación al caso de pórticos, donde el incremento térmico medio genera desplazamientos laterales relativos y, por tanto, flexión en los soportes. Esto conlleva estudiar la capacidad de deformación de las columnas, que están sometidas a flexión y a un esfuerzo axial; lo cual es un aspecto de gran relevancia, no solo para deformaciones termo-higrométricas o asientos de apoyo, sino también para la respuesta sísmica de estructuras.

Finalmente, sería deseable llevar a cabo alguna campaña experimental para verificar la metodología propuesta como, por ejemplo, mediante descensos de apoyo.

7. Referencias

- [1] R. McCormac, J., Brown, *Design of Reinforced Concrete*, Ninth Edit. Wiley, 2011.
- [2] P. Jiménez Montoya, A. García Meseguer, and F. Morán Cabré, *Hormigón armado*. 1991.
- [3] ACI Comité 318, *Requisitos de Reglamento para Concreto Estructural (ACI 318SUS-14) y Comentarios*. 2015.
- [4] A. H. Nilson, D. Darwin, and C. W. Dolan, *Design of Concrete Structures*. 2010.
- [5] N. Bagge, A. O'Connor, L. Elfgren, and C. Pedersen, "Moment redistribution in RC beams - A study of the influence of longitudinal and transverse reinforcement ratios and concrete strength," *Eng. Struct.*, vol. 80, pp. 11–23, 2014.
- [6] R. (Robert) Park, T. Paulay, and R. (Robert) Park, *Reinforced concrete structures*. J. Wiley & Sons, 1975.
- [7] M. Tichý, "Plastic analysis of concrete frames (with particular reference to limit states design) ." Collet's , London , 1977.
- [8] "Model Code 2010 - Final draft," in *The international federation for structural concrete, FIB. Bulletin*, 2012, p. 2 v.
- [9] J. M. Bairan, N. Duarte, and A. Mari, "Diseño no lineal de pórticos de hormigón armado," *Congr. la Asoc. Científico-Técnica del Hormigón Estructural*, pp. 1–10, 2011.
- [10] España. Ministerio de Fomento., *EHE-08: Instrucción de Hormigón Estructural: con comentarios de los miembros de la Comisión Permanente del Hormigón*. Madrid: Ministerio de Fomento, Centro de Publicaciones, 2009.
- [11] J. M. B. García, "Proyecto de estructuras de hormigón armado con armaduras de alta ductilidad," p. 135, 2007.

- [12] M.-Y. Ko, S.-W. Kim, and J.-K. Kim, "Experimental study on the plastic rotation capacity of reinforced high strength concrete beams," *Mater. Struct. Constr.*, vol. 34, no. 239, pp. 302–311, 2001.
- [13] C. Cosenza, Edoardo; Greco and M. Pecce, "Nonlinear Design of Reinforced Concrete Continuous Beams," *Struct. Eng. Int.*, no. June 2016, pp. 19–27, 1991.
- [14] A. R. Mari, B. University of California, and S. E. Laboratory., *Nonlinear geometric, material and time dependent analysis of three dimensional reinforced and prestressed concrete frames*. Berkeley, Calif.: Dept. of Civil Engineering, University of California, 1984.
- [15] J. Camara and R. Luís, "Structural response and design criteria for imposed deformations superimposed to vertical loads," in *The Second fib Congress*, 2006, pp. 1–12.
- [16] P. Levi, F. , Marro, P. , Viara, *Non-Linear Analysis of Beams and Frames*, Bulletin d. Torino: Comité Euro-International du Béton (CEB), 1995.
- [17] A. Mari, L. Torres, E. Oller, and C. Barris, "Performance-based slenderness limits for steel and FRP reinforced concrete flexural members," *Work presented to a meeting of fib Task Group 4.1 "Serviceability Limit States"*, Vienna, 2017.
- [18] España. Dirección General de Carreteras. and España. Ministerio de Fomento., *IAP- Instrucción sobre las acciones a considerar en el proyecto de puentes de carretera*. Madrid: Ministerio de Fomento, Centro de publicaciones, 1998.
- [19] A. M. Bernat, "Nonlinear Behavior of RC Structures and Design by Means of Linear Anaysis with Limited Redistribution." Barcelona, 2017.
- [20] BS EN 1992-1-1, "Eurocode 2: Design of concrete structures - Part 1-1 : General rules and rules for buildings," *Br. Stand. Inst.*, vol. 1, no. 2004, p. 230, 2004.

8. Anexos

Anexo A: Gráficos adimensionales para el cálculo de ancho característico de fisuras en secciones rectangulares.

